N1MA3W01 Algèbre 2 - Examen final
En janvier, 3h - 35 points

Exercice 0 (sur 6 points)

1. Calculer les valeurs et vecteurs propres des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6000 & 80008 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(R)$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Correction

1. Pour 2 points, on obtient que le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A est $P_A(X) = -(X+1)(X-3)^2$ et que celui de B est $P_B(X) = -(X-4)X^2$. De plus une rapide résolution de systèmes 3 fois 3 montre que le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 de A est de dimension 2, engendré par les vecteurs $(1,1,0)$ et $(1,1,1)$, et que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 de B est de dimension 1, engendré par le vecteur $(0,1,-20002)$
2. Il suffit de trouver un vecteur propre associé à la valeur propre -1 par une nouvelle résolution de système 3 fois 3 et de construire la matrice de passage en prenant pour colonnes des trois vecteurs propres indépendants constituées de $(1,1,0)$ et $(1,1,1)$ et du précédent.

3. La matrice B n'est pas diagonalisable car le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 de B est de dimension 1, alors la multiplicité de cette valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique est 2.

Exercice 1 (sur 8 points)

Soit A une matrice carrée complexe de taille n. On note λ_i, pour $i = 1, \ldots, l$, ses valeurs propres distinctes, de multiplicité α_i, pour $i = 1, \ldots, l$.

1. En trigonalisant A sur $\mathbb{C}$ montrer que pour tout entier naturel k,
$$\text{Tr } (A^k) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \lambda_i^k.$$
2. Soit B une autre matrice carrée complexe de taille n. On note μ_i, pour $i = 1, \ldots, m$, les valeurs propres distinctes de B de multiplicité β_i.

   On suppose que
$$\Pi_{1 \leqslant i \leqslant l} \ (1 - \lambda_i X)^{\alpha_i} = \Pi_{1 \leqslant i \leqslant m} \ (1 - \mu_i X)^{\beta_i}.$$
   Montrer que les polynômes caractéristiques de A et B coïncident.
3. Que peut-on alors dire de Tr $(A^k - B^k)$ pour tout entier naturel k ?
4. On suppose maintenant que la matrice A est réelle symétrique. Exprimer
$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j})^2$$
   en fonction de Tr (A^k) pour un entier k approprié.

Correction

1. Pour 2 points, on constate sur une forme trigonalisée de A que pour tout entier naturel k, la matrice A^k a pour valeurs propres distinctes λ_i^k, de multiplicité α_i, pour $i = 1, \ldots, l$. Il en découle que Tr $(A^k) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \lambda_i^k$.

2. Pour 2 points, on substitue $\frac{1}{X}$ à X, et en multipliant par X^n, remarquant que

$$n = \sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i,$$

on obtient que pour X assez grand,

$$\Pi_i \, (X - \lambda_i)^{\alpha_i} = \Pi_i \, (X - \mu_i)^{\beta_i},$$

et donc les polynômes caractéristiques de A et B coïncident.

3. Pour 2 points, on déduit de la question précédente que A et B ont les mêmes valeurs et vecteurs propres. La linéarité de la trace et la question 1 permettent alors de conclure.
4. Il découle de la définition du produit matriciel et de la symétrie de A que

$$\mathrm{Tr}\,(A^2) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j})^2.$$

Exercice 2 (sur 4 points)

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

1. Montrer que pour tout u, v dans E,

$$\frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

2. Soit A une application linéaire continue de E vers E symétrique i.e. tel que pour tout u, v dans E,

$$< u, A(v) > = < A(u), v > .$$

Montrer que pour tout u, v dans E,

$$4(Au, v) = (A(u+v), u+v) - (A(u-v), u-v).$$

Correction

1. Pour 2 points, on développe et on simplifie.
2. Pour 2 autre points, on développe, on simplifie et on se sert de la symétrie de A.

Exercice 3 (sur 4 points)

On fixe un entier d et on considère $p_1, \ldots, p_n$ dans l'espace $\mathbb{R}^d$ qui est muni de la norme euclidienne. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ notons $f_i \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction

$$x \mapsto 1 - \|x - p_i\|^2.$$

Montrer que l'espace engendré par les f_i est de dimension au plus $d + 2$.

Correction

En développant $f_i(x)$, on voit que les f_i sont toutes des combinaisons linéaires des fonctions suivantes : $x \mapsto \|x\|^2$, $x \mapsto 1$, et $x \mapsto x(k)$ ($k \in \{1, \ldots, d\}$). Comme ces fonctions sont linéairement indépendantes, l'espace engendré par les f_i est donc de dimension au plus $d + 2$.

Exercice 4 (sur 13 points)

On considère

— un espace vectoriel réel E de dimension finie n,

— une forme quadratique q sur E de signature $(n - 1, 1)$,

— un sous-espace vectoriel F de E de dimension p.

On suppose qu'il existe v dans F tel que $q(v) < 0$ et on note D la droite vectorielle engendrée par v.

1. Montrer que $E = D \oplus D^\perp$.
2. Montrer que la restriction de q à $D^\perp$ est définie positive ?
3. Montrer que $F \cap D^\perp$ est de dimension $p - 1$? On pourra considérer D' l'orthogonal de D dans F et s'inspirer de la première question.
4. Quelle est la signature de la restriction de q à F ?
5. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$.

Correction

1. Pour 2 points, on se dit que puisqu'il existe v dans F tel que $q(v) < 0$, la forme quadratique q est non dégénérée et un résultat du cours assure alors que $\dim E = \dim D + \dim D^{\perp}$. Il reste par conséquent uniquement à montrer que $D \cap D^{\perp} = \{0\}$. Pour cela considérons x dans $D \cap D^{\perp}$. Notons φ la forme polaire de cette forme quadratique. Il existe un réel λ tel que $x = \lambda v$. Alors, comme x est dans $D^{\perp}$, on a $\varphi(x, v) = 0$. En utilisant la bilinéarité cela se traduit par $\lambda q(v) = 0$, et comme $q(v) < 0$, cela donne $\lambda = 0$ et donc $x = 0$.
2. Pour 3 points. Supposons que la signature de la restriction de q à $D^{\perp}$ est (α, β). Alors, comme $E = D \oplus D^{\perp}$, la signature de q à E est $(\alpha, \beta + 1)$. Comme elle est par hypothèse égale à $(n-1, 1)$, on en déduit que $(\alpha, \beta) = (n-1, 0)$, ce qui revient à dire que la restriction de q à $D^{\perp}$ est définie positive.
3. Pour 4 points, on réalise qu'en utilisant la première question avec F au lieu de E, on obtient que $F = D \oplus D'$. Ainsi $\dim D' = p-1$. Comme $D' \subset F \cap D^{\perp}$, on en déduit que $\dim F \cap D^{\perp} \geqslant p-1$. Par ailleurs le sous-espace $F \cap D^{\perp}$ est contenu dans F et ne contient pas le vecteur v de F, on a donc aussi l'inégalité opposé.
4. Pour 2 points. La restriction de q à D est définie négative par hypothèse, et la restriction de q à $F \cap D^{\perp}$ est définie positive d'après la deuxième question ainsi la signature de la restriction de q à F est de la forme (α, β) avec $\alpha \geqslant p - 1$ (en utilisant la troisième question) et $\beta \geqslant 1$. Comme F est de dimension p (par hypothèse), on a nécessairement des égalités et la signature de la restriction de q à F est donc $(p-1, 1)$.
5. Pour 2 points. Une conséquence de la question précédente est que la restriction de q à F est non dégénérée et l'on peut alors reproduire l'argument de la première question pour en déduire que $E = F \oplus F^{\perp}$.