Exercice 1
On note $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ par $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\quad 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

►Correction.
Notons pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ par $\mathcal{P}_n$ la propriété « $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$ ». Elle est vraie au rang $n = 1$, car $1 \leqslant a_1 = 1 \leqslant 1^2$.
Supposons-là vraie jusqu'à un certain rang $n+1 \in \mathbf{N}$. Alors on a en particulier

$$1 \leqslant a_{n+1} \leqslant (n+1)^2, \quad 1 \leqslant a_n \leqslant n^2.$$

Donc $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+1} \leqslant (n+1)^2 + \dfrac{n^2}{n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence.
Or $(n+1)^2 + \dfrac{n^2}{n+1} \leqslant (n+2)^2 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \iff \dfrac{n^2}{n+1} \leqslant 2(n+1) + 1 \iff n^2 \leqslant 2n^2 + 5n + 3$. Comme pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $n^2 + 5n + 3 \geqslant 0$, l'hérédité est vérifiée. Par principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 2
Soit E un ensemble. On définit la *différence symétrique* de deux parties A et B de E par

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

1) Montrer que pour tout couple (A, B) de parties, $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. Que dire de la réunion $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$?

2) Montrer que Δ est une *opération associative sur* $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire que pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$, $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

►Correction.

1) Par définition, $A\backslash B = A \cap B^c$, et $B\backslash A = B \cap A^c$. Or $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.
Donc il suffit de démontrer que $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.

En effet, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (B \cap B^c) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.
La réunion $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ est une réunion disjointe.

2) D'après la première question :

$$x \in A\Delta B \quad \iff \quad x \in A \text{ ou } x \in B \text{ mais pas dans A et B.}$$

Pour trois parties A, B, C, on a

$$x \in (A\Delta B)\Delta C \quad \iff \quad x \text{ est dans les trois parties ou dans une des trois seulement.}$$

Cette assertion est bien entendu la même si on permute les rôles de A, B, C.

On pourrait aussi se lancer dans une démonstration avec les définitions ensemblistes, mais c'est (beaucoup) plus pénible.

Exercice 3
Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$A \cup B = B \cap C \quad \iff \quad A \subset B \subset C, \qquad \text{et} \qquad (A \cap B)^c\backslash C = (C^c\backslash A) \cup (A^c\backslash C).$$

►Correction.
Première équivalence :
Si $A \cup B = B \cap C$, soit $x \in A \subset A \cup B$, donc $x \in B$ (car $x \in B \cap C$). Si $y \in B$ alors comme $y \in A \cup B = B \cap C$, on a aussi $y \in C$.
Inversement, si $A \subset B \subset C$, alors montrons que $A \cup B = B \cap C$.
Soit $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, $x \in B$ et C par hypothèse. Si $x \in B$ alors $x \in C$ car $B \subset C$ et donc $x \in B \cap C$.
Deuxième égalité :
elle s'obtient en écrivant que

$$(A \cap B)^c\backslash C = (A^c \cup B^c) \cap C^c = (A^c \cap C^c) \cup (B^c \cap C^c) = (C^c\backslash A) \cup (A^c\backslash C)$$

Exercice 4
Montrer que pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$,

$$\left|\sin(nx)\right| \leqslant n\left|\sin x\right|.$$

►Correction.
On utilise une récurrence.
Pour $n = 0$, l'inégalité est claire. Supposons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\left|\sin(nx)\right| \leqslant n\left|\sin x\right|$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\sin((n+1)x)\right| &= \left|\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)\right| \\ &\leqslant \left|\sin(nx)\cos(x)\right| + \left|\sin(x)\cos(nx)\right| \leqslant n\left|\sin x\right| + \left|\sin(x)\right|,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence. Ce qui achève la preuve.

Exercice 5
Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Est-il vrai que

1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?

2) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

▶Correction.

1) Soit C une partie de A et B. Alors $C \subset A \cap B$ donc C est une partie de $A \cap B$. Inversement, si C est une partie de $A \cap B$, alors $C \subset A$ et $C \subset B$. C'est donc une partie de A et une partie de B.

2) La deuxième égalité est fausse. Prendre par exemple dans $E = \mathbf{R}$, $A = [-1, 0]$ et $B = [0, 1]$. Alors $C = [-1, 1]$ est une partie de $C = A \cup B$, mais n'est ni une partie de A, ni une partie de B.

Exercice 6
Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $2^{4\cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{4\sin^2(x)-3} = 20$.

▶Correction.
Notons $u = 4\cos^2(x)+1$ et $v = 4\sin^2(x)-3$. Alors $u + v = 2$, donc on commence par résoudre $2^u + 16\times 2^{2-u} = 2^u + 16\times \dfrac{4}{2^u} = 20$ pour $u \in [1, 5]$.
L'équation est équivalente à $(2^u)^2 + 64 = 20 \times 2^u$. Or le trinôme $x^2 - 20x + 64 = 0$ admet pour racines $\dfrac{20 \pm 12}{2} = 16$ ou bien 4.
Donc $2^u = 16$ ou $2^u = 4$, donc $u = 4$ ou $u = 2$. Finalement les x solutions sont exactement les solutions de

$$4\cos^2 +1 = 4, \quad \text{ou} \quad 4\cos^2 +1 = 2.$$

Ainsi, $\cos(x) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos(x) = \pm\dfrac{1}{2}$. L'ensemble solution est donc $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}, \pm\dfrac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}, \pm\dfrac{\pi}{3} \pmod{2\pi}, \pm\dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}\right\}$.

Exercice 7
Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Que pensez-vous de l'implication
$A \cup B \not\subset C \implies (A \not\subset C \text{ ou } B \not\subset C)$?

▶Correction.
Si $A \subset C$ et $B \subset C$, alors la réunion aussi. La contraposée est donc vérifiée.

Exercice 8
Soit $n \geqslant 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1)$ et $\displaystyle\prod_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p} 2^{p!k}$.

▶Correction.
$\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{j} j + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} n = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{j+1+n}{2}(n-j-1+1) + n^2$. On termine ensuite le calcul en utilisant les formules de somme des carrés.
On factorise d'abord : $4k^2 - 1 = (2k-1)(2k+1)$, et
$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1) = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}\,\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.
$\displaystyle\prod_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p} 2^{p!k} = \prod_{p=0}^{n-1}\frac{1-2^{(p+1)p!}}{1-2^{p!}} = \prod_{p=1}^{n-1}\frac{1-2^{(p+1)!}}{1-2^{p!}}$, le dernier produit est téléscopique. On trouve alors $\displaystyle\prod_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p} 2^{p!k} = 2^{n!} - 1$.

Exercice 9
Calculer pour tout entier $n \geqslant 2$ la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

▶Correction.
$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)\right) = \sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)+\ln(k+1)-2\ln k) = \sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln k) + \sum_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)$. Ces deux sommes sont téléscopiques, on conclut.

Exercice 10 (Autour de la loi Hypergéométrique)
Soient $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}$ tels que $n \leqslant N$ et $Np \in \mathbf{N}$.

On appelle *loi hypergéométrique*, notée $\mathcal{H}(N, n, p)$, la suite $(p_j)_{j\in\mathbf{N}}$ définie par $p_j = \dfrac{\binom{Np}{j}\binom{N(1-p)}{n-j}}{\binom{N}{n}}$.

1) Montrer que p_k est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de k.

2) Montrer que pour tout $(N', M', k) \in \mathbf{N}^3$, $\displaystyle\binom{N'+M'}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{N'}{j}\binom{M'}{k-j}$.

3) En déduire que $(p_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une *loi de probabilité* : c'est-à-dire qu'elle vérifie $\displaystyle\sum_{j\in\mathbf{N}} p_j = 1$. On précisera en quoi la somme précédente est une somme finie.

►Correction.

1) On écrit les conditions. Le terme p_j est non nul pour les j tels que

$$0 \leqslant j \leqslant Np, \quad 0 \leqslant n-j \leqslant N(1-p).$$

Ainsi, l'ensemble des j pour lesquels p_j est non nul est fini : c'est l'intersection des deux ensembles finis ci-dessus.

2) On développe $(1+x)^{N'+M'} = (1+x)^{N'}(1+x)^{M'}$. Avec la formule de Binôme on a

$$\sum_{l=1}^{N'+M'} \binom{N'+M'}{l} x^l = \sum_{j_1=1}^{N'} \binom{N'}{j_1} x^{j_1} \sum_{j_2=1}^{N'} \binom{N'}{j_2} x^{j_2}.$$

Les deux membres sont des polynômes en x. Le terme d'ordre k à gauche est $\displaystyle\binom{N'+M'}{k} x^k$, à droite c'est $\displaystyle\sum_{j_1}^{N'} \binom{N'}{j_1} x^{j_1} \binom{N'}{j_2} x^{k-j_2}$. On peut identifier leurs coefficients, et on obtient la formule.

3) Ceci permet de démontrer que

$$\sum_{j\in\mathbf{N}} p_j = \sum_{j=0}^{n} p_j = 1,$$

où la première égalité est obtenue en constatant que si $j \geqslant n$, $p_j = 0$, la seconde en utilisant la seconde question.

Exercice 11

Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n, k \text{ pair}} \binom{n}{k}$, et $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n, k \text{ impair}} \binom{n}{k}$.

►Correction.

Notons S_2 la somme faisant intervenir les k pairs, et S_1 pour les pairs. Alors d'après la formule du binôme appliquée à $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ pour $n \geqslant 1$

$$S_1 + S_2 = 2^n, \quad S_2 - S_1 = 0.$$

Finalement $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$.

Exercice 12

Soit ϕ l'application définie par $\phi : \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{Q}, (p,q) \longmapsto p + \dfrac{1}{q}$. Est-ce que ϕ est injective ? surjective ? bijective ?

►Correction.

Montrons que ϕ est injective. Soient (p,q) et $(p'q') \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$, tels que $p + \dfrac{1}{q} = p' + \dfrac{1}{q'}$. Alors

$p - p' = \dfrac{1}{q'} - \dfrac{1}{q}$. Supposons que $p' \geqslant p$ par exemple. Alors soit $p = p'$ et dans ce cas $q' = q$ aussi.

Soit $p > p'$ donc $p - p' \geqslant 1$, mais si $q, q' \geqslant 1$, alors $\dfrac{1}{q'} - \dfrac{1}{q} \in]-1,1[$, ce qui est donc absurde. L'application est bien injective.

Pour la surjectivité, cherchons un rationnel ne s'écrivant pas sous la forme $p + \dfrac{1}{q}$. $2/3$ convient : en effet, si $\dfrac{2}{3} = p + \dfrac{1}{q} = \dfrac{pq+1}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \geqslant 1$, alors $2q = 3(pq+1)$. Donc q serait un diviseur de 3 : si $q = 3$, alors $p = 1/3$ c'est impossible, si $q = 1$, alors $p = -\dfrac{1}{3}$, impossible aussi.

L'application n'est donc pas bijective. En fait comme $1/q \leqslant 1/2$ dès que $q \geqslant 2$, tous les rationnels dans des intervalles du type $]p+1/2, p+1[$ ne sont pas dans l'image.

Exercice 13

Les applications suivantes sont-elles bijectives ? injectives ? surjectives ?

$f_1 : (x,y) \longmapsto (1, x-y, y)$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$,

$f_2 : (x,y) \longmapsto 2y$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.

►Correction.

— Injectivité : si $f_1(x,y) = f_1(x',y')$ (x,y) et (x',y') dans $\mathbf{R}^2$. Alors $(1, x-y, y) = (1, x'-y', y')$, d'où $y = y'$ et $x = x'$. L'application est bien injective.
Surjectivité : l'élément $(2,0,0)$ n'est pas dans l'image de f, l'application n'est pas surjective.

— Injectivité : $f_2(1,2) = f_2(3,2)$ mais pourtant $(1,2) \neq (3,2)$. L'application n'est donc pas injective.
Surjectivité : soit $y \in \mathbf{R}$. Alors $f(0, y/2) = y$ donc on atteint tous les éléments de $\mathbf{R}$ par f_2, l'application est donc surjective.

Exercice 14
Pour quelles valeurs de a, b, c réels le système linéaire suivant est-il compatible ?
$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}.$$

Exercice 15
Pour quelles valeurs de a, b, c réels le système linéaire suivant est-il compatible ?
$$\begin{cases} x + ay + cz = 0 \\ bx + cy - 3z = 1 \\ ax + 2y + bz = 5 \end{cases}.$$

Exercice 16
Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y' + 2xy = e^x + x$ sur un intervalle à préciser.

▸Correction.
On résout l'ED sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Elle est équivalente à $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{e^x+x}{1+x^2}$. L'ensemble des solutions de l'homogène est l'ensemble des fonctions du type $x \longmapsto \mathrm{C}e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$ pour toute constante $\mathrm{C} \in \mathbf{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $x \longmapsto \frac{\mathrm{C}(x)}{1+x^2}$.
Elle doit vérifier après simplifications $\frac{\mathrm{C}'(x)}{1+x^2} = \frac{e^x+x}{1+x^2}$, soit $\mathrm{C}(x) = e^x + \frac{x^2}{2}$. Ainsi l'ensemble des solutions est
$$\left\{ x \longmapsto \frac{\mathrm{C}}{1+x^2} + \frac{e^x + \frac{x^2}{2}}{1+x^2}, \quad \mathrm{C} \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice 17
On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une injection $i : \mathrm{E} \hookrightarrow \mathbf{N}$.

1) Montrer qu'un ensemble E est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection $f : \mathrm{E} \to \mathrm{N}$ où $\mathrm{N} \subset \mathbf{N}$. On admet dans la suite qu'il existe une bijection $\Phi : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$.
2) Soient A et B deux ensembles dénombrables. Démontrer que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est dénombrable. En déduire que $\mathbf{N}^k$ est dénombrable pour tout $k \in \mathbf{N}$.

▸Correction.

1) S'il existe une bijection $f : \mathrm{E} \to \mathrm{N}$, alors notons $i_{\mathrm{N}} : \mathrm{N} \to \mathbf{N}$ l'injection de N dans $\mathbf{N}$ définie par $x \in \mathrm{N} \longmapsto x \in \mathbf{N}$.
Alors $i_{\mathrm{N}} \circ f$ est une application $\mathrm{E} \to \mathbf{N}$ qui est injective en tant que composée d'applications injectives.
Réciproquement, si $i : \mathrm{E} \to \mathbf{N}$ est injective. Alors considérons $f : \mathrm{E} \to \mathrm{Im}\, i = \mathrm{N}, x \longmapsto i(x)$ est une bijection sur $\mathrm{Im}\, i$ qui est une partie de $\mathbf{N}$.
Moralité : en restreignant l'espace d'arrivée on obtient la surjectivité.
2) Notons $_{\mathrm{A}}$ et ϕ_{B} les deux injections A ou $\mathrm{B} \to \mathbf{N}$.
Alors formons $i : \mathrm{A} \times \mathrm{B} \to \mathbf{N}^2$ définie par $i(n) = (i_{\mathrm{A}}(n), i_{\mathrm{B}}(n))$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On vérifie facilement que l'injectivité de i_{A} et i_{B} entraine celle de i, puis que $\Phi \circ i : \mathrm{A} \times \mathrm{B} \to \mathbf{N}$ est une injection.
$\mathrm{Id}_{\mathbf{N}} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est évidemment une injection. Donc $\mathbf{N}$ est dénombrable, et d'après ce qui précède, $\mathbf{N}^k$ aussi pour tout entier k.

Exercice 18
On considère l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x+y, 3x-y, 2x+y)$. L'application f est-elle une injection ? calculer $f(\mathbf{R}^2)$. Est-elle une bijection ? Si oui, déterminer f^{-1}.

▸Correction.
Considérons (x, y) et (x', y') dans $\mathbf{R}^2$ tels que $(x+y, 3x-y, 2x+y) = (x'+y', 3x'-y', 2x'+y')$. La dernière ligne nous donne $x + (x+y) = x' + (x'+y')$, avec la première on récupère $x = x'$, puis $y = y'$ à nouveau avec la première. L'application est donc injective.
Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Résolvons les équations
$$a = x+y, \quad b = 3x-y, \quad c = 2x+y.$$
$\Longleftrightarrow$
$$a = x+y, \quad y = 3(c-a)-b, \quad c-a = x$$
$\Longleftrightarrow$
$$2a-c = y, \quad y = 3(c-a)-b, \quad c-a = x.$$
Donc $(a, b, c) \in \mathrm{Im}\, f$ si et seulement si $2a - c = 3(c-a) - b$, en prenant $(a, b, c) = (1, 0, 1)$ par exemple on obtient un élément de $\mathbf{R}^3$ qui n'est pas dans $\mathrm{Im}\, f$. L'application n'est ni surjective, ni bijective.

Exercice 19
Soient E et F deux ensembles et $i : E \longrightarrow F$ une application.
On appelle *inverse à gauche* (resp. *section de* i) une application $s : F \longrightarrow E$ (resp. s surjective) telle que $s \circ i = \mathrm{Id}_E$.

1) Supposons que i possède un inverse à gauche, montrer que i est injective.

2) Réciproquement : supposons i injective. Montrer qu'il existe une section de i.

3) Caractériser les applications injectives avec la notion d'inverse à gauche.

►Correction.

1) Notons s un inverse à gauche de i, soient $x, x' \in E$. Alors si $i(x) = i(x')$, en composant par s on obtient $s \circ i(x) = s \circ i(x')$ d'où $x = x'$.
i est donc injective.

2) Supposons que i est injective.
Alors on souhaite construire une application $s : F \longrightarrow E$ telle que $s \circ i = \mathrm{Id}_E$.
Soit $y \in E$. Si $y \operatorname{Im} i$, alors il existe un unique $x \in E$ tel que $i(x) = y$. Pour tout $y \in \operatorname{Im} i$, on pose donc $s(y) = x$. Il est très important d'invoquer l'unicité de x, puisque i est injective. Si i ne l'est pas on pourrait avoir deux x, x' tels que $i(x) = i(x')$. Auquel cas s n'est pas bien définie.
Il reste à définir $s(y)$ pour les $y \in E \backslash \operatorname{Im} i$: on prolonge s en choisissant $x_0 \in E$ quelconque et en posant $s(y) = x_0$. Vérifions que l'application s ainsi construite convient.
s est surjective — si $x \in E$, alors cherchons $y \in F$ tel que $s(y) = x$. Comme par construction $s \circ i(x) = x$, on a $s(y) = x$ pour $y = i(x)$. L'application s est bien surjective.
s est un inverse à gauche — pour la même raison, si $x \in E$, alors $s \circ i(x) = s(i(x)) = x$ par construction.
On voit bien dans tout ce qui précède que les valeurs que prend s en dehors de $\operatorname{Im} i$ n'ont aucune importance pour la surjectivité et l'inversibilité à gauche.

3) En combinant les deux questions, on a
i injective $\Longleftrightarrow$ i possède une section.

Exercice 20
Soient a, b deux fonctions continues.
On suppose que a, b sont T-périodiques, avec $T > 0$. À quelle condition une solution quelconque u de $y' = ay + b$ est-elle aussi T-périodique ?

►Correction.
On a $u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Alors pour tout t on a aussi $u'(t+T) = a(t+T)u(t+T) + b(t+T) = a(t)u(t+T) + b(t)$ par T-périodicité de a et b.
Finalement les fonctions $t \longmapsto u(t+T)$ et $t \longmapsto u(t)$ satisfont la même équation différentielle. Par un théorème du cours, si elles satisfont un problème de Cauchy alors sont égales.
Il suffit donc qu'il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $u(t_0 + T) = u(t_0)$ pour que l'on ait u périodique.

Exercice 21
Soient ω_0, ω deux éléments de $\mathbf{R}^{+*}$ distincts. Trouver les solutions de $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$ vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

►Correction.
Le trinôme caractéristique étant $x^2 + \omega^2 = 0$ qui admet pour racines $\pm i\omega$, les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$x \longmapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

avec $A, B \in \mathbf{R}$.
Cherchons de manière naturelle une solution particulière du type $x \longmapsto \lambda\cos(\omega_0 x) + \mu\sin(\omega_0 x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.
Alors en injectant dans l'équation différentielle on trouve

$$\left(-\lambda\omega_0^2\cos(\omega_0 x) - \mu\omega_0^2\sin(\omega_0 x)\right) + \omega^2\left(\lambda\cos(\omega_0 x) + \mu\sin(\omega_0 x)\right) = \cos(\omega_0 x).$$

$\mu = 0$ et $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$ fournit un choix de constantes. On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{x \longmapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 x), \quad A, B \in \mathbf{R}\right\}.$$

Exercice 22
Soient E, F, G trois ensembles non vides, et $f : E \longrightarrow F$ une application.
Montrer que $\Psi_f : \begin{cases} E^G & \longrightarrow & F^G \\ \varphi & \longmapsto & f \circ \varphi \end{cases}$ est injective si et seulement si f l'est.

►Correction.
On note pour $x \in E$, $\underline{x}$ la fonction constante égale à x définie sur E à valeurs dans E.
$\Longrightarrow$|Supposons Ψ_f injective. Alors soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Écrite autrement, cette égalité signifie que $f \circ \underline{x} = f \circ \underline{x'}$. Donc $\underline{x} = \underline{x'}$ par hypothèse et $x = x'$.
$\Longleftarrow$|Supposons f injective. Alors soient φ_1 et φ_2 deux applications de E^G telles que $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$. Montrons que $\varphi_1 = \varphi_2$.
Soit donc $x \in G$, $f \circ \varphi_1(x) = f \circ \varphi_2(x)$ par hypothèse. Or, f est injective donc $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, et ce pour tout $x \in G$, Ψ_f est donc injective.

Exercice 23

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On considère $f_\alpha : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ définie par $f_\alpha(x,y,z) = (x+z, y+z, x+\alpha y+z)$.

1) Supposons $\alpha = -1$, f_α est-elle injective, surjective, bijective ? Déterminer l'image, et le cas échéant l'inverse.

2) Supposons $\alpha = 0$, f_α est-elle injective, surjective, bijective ? Déterminer l'image, et le cas échéant l'inverse.

►Correction.

1) Soit $(x,y,z,x',y',z') \in \mathbf{R}^6$ tel que $f_\alpha(x,y,z) = f_\alpha(x',y',z')$. Alors $x+z = x'+z'$, $y+z = y'+z'$ et $x-y+z = x'-y'+z'$. Donc en combinant les équations 1 et 3, on obtient $y = y'$, puis successivement $x = x'$ et $z = z'$. f_{-1} est donc injective.
Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, cherchons $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $f_{-1}(x,y,z) = (x+z, y+z, x-y+z) = (a,b,c)$. On récupère $x = 2a-b-c$, $y = a-c$, $z = b-a+c$.
L'application est donc surjective et le calcul précédent fournit son inverse :

$$f_{-1}^{-1}(a,b,c) = (2a-b-c, a-c, b-a+c).$$

2) Considérons à présent f_0 définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ par $f_0(x,y,z) = (x+z, y+z, x+z)$.
Alors on voit clairement que f_0 n'est pas injective : par exemple $f_0(0,1,0) = f_0(-1,0,1) = (0,1,0)$ mais pourtant $(0,1,0) \neq (-1,0,1)$.
Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, cherchons $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $f_{-1}(x,y,z) = (x+z, y+z, x+z) = (a,b,c)$, alors $a = x+z$, $b = y+z$ et $c = x+z = a$.
En particulier tout triplet (a,b,c) tel que $a \neq c$ n'est pas dans l'image de f_0. f_0 n'est donc pas surjective sur $\mathbf{R}^3$.

Exercice 24

Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = 3x^2$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

♣ Indication – on pourra chercher une solution particulière sous forme d'un trinôme.

►Correction.

Le polynôme caractéristique est $x^2 + 1 = 0$, donc l'ensemble des solutions de l'homogène est l'ensemble des fonctions du type
$x \longmapsto \mathrm{A}\cos(x) + \mathrm{B}\sin(x)$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $x \longmapsto ax^2 + bx + c$. En injectant on trouve
$2a + c = 0, 0 + b = 0, a = 3$. Bref, $3x^2 - 6$ est une solution particulière et l'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions du type
$x \longmapsto \mathrm{A}\cos(x) + \mathrm{B}\sin(x) + 3x^2 - 6 = y(x)$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{R}$.
$y(0) = 1$ donne $\mathrm{A} - 6 = 1$, $\mathrm{A} = 7$ et $y'(0) = \mathrm{B} + 0 = 2$ donc $\mathrm{B} = 2$.

Exercice 25

Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $y' + y = |x|$.

►Correction.

Par définition de la valeur absolue, la résolution s'effectue facilement sur $\mathbf{R}^+$ puis $\mathbf{R}^-$.
Les équations $y' + y = x$ et $y' + y = -x$ se résolvent en
$y_1 : x \longmapsto \mathrm{C}e^{-x} + (x-1)$ et $y_2 : x \longmapsto \mathrm{D}e^{-x} + (-x+1)$. Ainsi, pour obtenir les solutions sur $\mathbf{R}$ on regarde déjà si les deux familles se raccordent en 0 : $y_1(0) = \mathrm{C} - 1 = y_2(0) = \mathrm{D} + 1$.

Donc nécessairement $\mathrm{D} - \mathrm{C} = -2$. Considérons la fonction y définie par $y(x) = \begin{cases} \mathrm{C}e^{-x} + (x-1) & \text{si. } x \in \mathbf{R}^{+*} \\ (\mathrm{C}-2)e^{-x} + (-x+1) & \text{si } x \in \mathbf{R}^{-*} \end{cases}$. Alors par ce qui précède y est continue.
Regardons la dérivabilité de y en 0. On étudie les limites des dérivées à droite et gauche :
$-\mathrm{C}e^{-x} + 1 \to_{x\to 0} 1 - \mathrm{C}$,
$-(\mathrm{C}-2)e^{-x} - 1 \to_{x\to 0} 1 - \mathrm{C}$. Elles sont identiques pour tout C. D'après l'égalité des accroissements finis, pour tout C, y définie plus haut est solution sur $\mathbf{R}$.

Exercice 26

Résoudre le système différentiel suivant sur $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y' & -y & = z \\ z' & +z & = 3y \end{cases}.$$

►Correction.

Les deux fonctions y, z sont *a priori* dérivables une fois. Mais comme $y' = z + y$, y est deux fois dérivable et on obtient :$y'' - 4y = 0$.
Donc y est nécessairement de la forme $y(x) = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{-2x}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
En injectant dans la première équation, on trouve $z(x) = \mathrm{A}e^{2x} - 3\mathrm{B}e^{-2x}$.
Inversement, prenons (y, z) de cette forme. La première équation est vérifiée, on vérifie que c'est le cas aussi pour la seconde.

Exercice 27

Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par : $\quad \forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = \dfrac{z + |z|}{2}$.

Déterminer $f(\mathbf{C})$.

►Correction.

On voit qu'en essayant de regarder le module et l'argument, la forme trigonométrique semble bien adaptée. On note donc pour $z \in \mathbf{C}$, $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbf{R}^+$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$.

En mettant l'angle moitié en facteur on obtient $f(z) = \frac{\rho}{2}e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$, donc $|f(z)| = \rho\,|\cos(\theta/2)|$ et $\arg f(z) = \frac{\theta}{2}$.
Comme $\frac{\theta}{2} \in -[\pi/2, \pi/2[$, $\cos(\theta/2) \geqslant 0$, et $|f(z)| = \rho\cos(\theta/2)$. En particulier, on voit que $f(z)$ est dan le demi-plan supérieur

$$f(z) \in \{z \in \mathbf{C} \quad : \quad \text{Ré}(z) \geqslant 0\}.$$

Mais on peut dire même un peu mieux :

— si $\frac{\theta}{2} \in]-\pi/2, \pi/2[$, alors $f(z) \in \{z \in \mathbf{C} \quad : \quad \text{Ré}(z) > 0\}$, le demi-plan ouvert supérieur.

— sinon $\theta = -\pi$ et $z \in \mathbf{R}^-$. Or si $z \in \mathbf{R}^-$, $f(z) = 0$ car $|z| = -z$.

L'image semble donc être plutôt

$$\{z \in \mathbf{C} \quad : \quad \text{Ré}(z) > 0\} \cup \{0\}.$$

Montrons le :
on a déjà montré que $f(\mathbf{C}) \subset \{z \in \mathbf{C} \quad : \quad \text{Ré}(z) > 0\} \cup \{0\}$.
Inversement, on a $f(0) = 0$ donc $0 \in f(\mathbf{C})$ et si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ (il est de partie réelle strictement positive), on a $f\left(\frac{\rho}{\cos(\theta)}e^{2i\theta}\right) = z = \rho e^{i\theta}$. L'image est donc bien ce que l'on a affirmé.
On voit bien que l'on aurait un soucis avec les complexes dans $i\mathbf{R}^{+*}$ et $i\mathbf{R}^{-*}$ dans la résolution précédente ($\cos(\theta)$ serait nul). L'image n'est donc pas tout le demi-plan de droite, mais uniquement le demi-plan ouvert de droite, et zéro.

Exercice 28

Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^3 = -8$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

►Correction.
L'équation se ramène à un problème de racines de l'unité, puisque
$\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^3 = -8 = (2e^{i\pi/3})^3 \iff \left(\frac{z-1}{2e^{i\pi/3}(z-i)}\right)^3 = 1.$
D'après le cours, on sait donc que $\frac{z-1}{2e^{i\pi/3}(z-i)} \in \left\{1, e^{i\pi}3, e^{2i\pi}3\right\}$.
Résolvons à présent l'équation suivante en z, pour tout complexe $Z \in \mathbf{C}$: $\frac{z-1}{2e^{i\pi/3}(z-i)} = Z \iff \frac{z-1}{z-i} = 2e^{i\pi/3}Z \iff$
$z = \frac{1+2ie^{i\pi/3}Z}{1-2e^{i\pi/3}Z}$.
On en déduit alors les solutions de l'équation de départ en remplaçant Z par les éléments de $\left\{1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}\right\}$

Exercice 29

Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbf{C}^2$, $\quad |a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$.
Préciser ensuite le cas d'égalité.

►Correction.
L'équation est bien sûr équivalente à la même élevée au carrée, par positivité des deux membres.
Donc on démontre plutôt que

$$|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \leqslant |a+b|^2 + |a-b|^2 + 2|a+b||a-b|$$

$\iff$

$$|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2\text{Ré}(a\bar{b}) + |a|^2 + |b|^2 - 2\text{Ré}(a\bar{b}) + 2|a+b||a-b|.$$

Finalement après simplification, on arrive à

$$0 \leqslant |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| + 2|a+b||a-b| = (|a|-|b|)^2 + 2|a+b||a-b|,$$

qui est trivialement vérifiée.
Cas d'égalité : il y a égalité si et seulement si $|a| = |b|$ et $|a+b||a-b| = 0$, donc si et seulement si $a = \pm b$.

Exercice 30

Soit $Z \in \mathbf{C}^*$.

1) Résoudre en z l'équation $e^z = Z$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

2) Peut-on définir une notion de logarithme complexe en tant que réciproque de la fonction $z \in \mathbf{C} \longmapsto e^z$?

►Correction.

1) On résout donc $e^z = Z$ en $z \in \mathbf{C}$ pour Z un complexe fixé.
Notons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $Z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbf{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$.
Nécessairement $x = \ln\rho$ et $y - \theta \in 2\pi\mathbf{Z}$. L'ensemble des solutions est donc

$$\{\ln\rho + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}\}.$$

2) En langage des applications, on donc constaté que $z \in \mathbf{C} \longmapsto e^z$ n'est pas injective de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{C}$ mais surjective.
Elle n'est donc pas bijective et on ne peut donc définir le logarithme complexe en tant que bijection réciproque d'une telle application.

Exercice 31
Calculer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.

►Correction.
Méthode habituelle.
$\cos(5\theta) = \text{Ré}\left(e^{5i\theta}\right) = \text{Ré}\left(\left(e^{i\theta}\right)^5\right)$. On développe $(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta$.
Pour $\cos(5\theta)$ on récupère la partie réelle :
$\cos(5\theta) = \cos^5(\theta) - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$,
et la partie imaginaire pour $\sin(5\theta)$: $\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$.

Exercice 32 (Image d'un cercle par l'inversion)
Dans cet exercice les cercles sont compris en terme d'affixes.
Soient $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$ tels que $z_0 \notin \mathcal{C}(O; r)$. On note simplement $\mathcal{C}$ le cercle $\mathcal{C}(z_0; r)$.

1) Pour $z \in \mathcal{C}$, montrer : $z \in \mathcal{C} \iff |z|^2 - z_0\overline{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2 = r^2$.

2) En déduire que l'image $f(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ par $f : z \in \mathbf{C}^* \longmapsto \dfrac{1}{z}$ est un cercle dont on précisera centre et rayon.

►Correction.
1) Par définition, $z \in \mathcal{C} \iff |z - z_0| = r$. On élève ensuite au carré puis on obtient l'équation de l'énoncé :
$z \in \mathcal{C} \iff |z|^2 - z_0\overline{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2 = r^2$.

2) Déjà, la notation $f(\mathcal{C})$ a bien un sens comme par hypothèse $0 \notin \mathcal{C}$ puisque $|z_0| \neq r$.
Pour se ramener à une équation de cercle en $\dfrac{1}{z}$, divisons toute l'équation par $z\overline{z}$. On obtient alors : si $z \in \mathcal{C}$,
$$1 - \frac{z_0}{z} - \overline{\left(\frac{z_0}{z}\right)} + \frac{|z_0|^2}{|z|^2} = \frac{r^2}{|z|^2}.$$
Notons $Z = \dfrac{1}{z}$, on cherche donc une équation de cercle en Z. On a
$$1 - z_0 Z - \overline{z_0 Z} + |Z|^2\left(|z_0|^2 - r^2\right) = 0 \iff \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} - \frac{1}{|z_0|^2 - r^2}\left(z_0 Z + \overline{z_0 Z}\right) + |Z|^2 = 0.$$
En distinguant les cas $|z_0| \geqslant r$ et $|z_0| < r$ on reconnait l'équation du cercle $\mathcal{C}\left(\dfrac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - r^2}; \dfrac{1}{\left||z_0|^2 - r^2\right|}\right)$.

Exercice 33
On note $\mathcal{P}$ le demi plan supérieur de Poincaré, *i.e.* $\mathcal{P} = \{z \in \mathbf{C} \quad : \quad \operatorname{Im} z > 0\}$.

1) Montrer que si $(a, b, c, d) \in \mathbf{N}^2 \times (\mathbf{N}^*)^2$ vérifie $ad - bc = 1$, alors $\mathcal{P}$ est stable par $f : z \longmapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$.

2) On suppose que $c = 0$. Comment appelle-t-on f ? Préciser ses caractéristiques.

►Correction.
1) f est une application bien définie sur $\mathcal{P}$: si $\operatorname{Im} z > 0$, alors $\operatorname{Im}(cz + d) = c\operatorname{Im} z + d > 0$, *a fortiori* $cz + d \neq 0$.
Après calculs on trouve que : $\forall z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im}(f(z)) = \dfrac{\operatorname{Im} z \times (ad - bc)}{|cz + d|^2} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}$. Donc si $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} f(z) > 0$. Autrement dit $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$.

2) Si $c = 0$, f prend la forme d'une similitude. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$. On cherche donc un point fixe $\omega \in \mathbf{C}$ défini par $\omega = \dfrac{a}{d}\omega + \dfrac{b}{d}$ soit $\omega = \dfrac{\frac{b}{d}}{1 - \frac{a}{d}}$ si $a \neq d$.
Si $a = d$: on a donc une translation de vecteur d'affixe $\dfrac{b}{d}$ (elle est donc horizontale).
Si $a \neq d$: on a $s(z) - s(\omega) = \dfrac{a}{d}(z - \omega)$ donc $s(z) = \omega + \dfrac{a}{d}(z - \omega)$. On a donc une similitude de centre ω de rapport $\dfrac{a}{d}$ et d'angle nul.

Exercice 34
Soient $n \geqslant 3$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les racines n-ièmes de l'unité avec $\omega_n = 1$.

1) Soit $p \in \mathbf{Z}$, calculer $\quad S_p = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \omega_j^p$.

2) Calculer ensuite $\quad T_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega_j}$.

►Correction.

1) Telle quelle, la somme n'est pas géométrique. Mais comme $\omega_j = \omega^j$ si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on a finalement $S_p = \sum_{j=1}^{n} (\omega^p)^j = \begin{cases} \omega^p \dfrac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0 & \text{si } n \mid p \\ n & \text{sinon} \end{cases}$.

2) Remarquons d'abord que T_n est bien définie puisque l'on exclut 1 en enlevant ω_n.

Comme pour tout $j \in \{1, ..., n-1\}$, $\dfrac{1}{1-\omega_j} = \dfrac{1}{1-e^{\frac{2ij\pi}{n}}} = \dfrac{1}{e^{\frac{ij\pi}{n}}\left(e^{-\frac{ij\pi}{n}} - e^{\frac{ij\pi}{n}}\right)} = \dfrac{ie^{\frac{-ij\pi}{n}}}{2\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\tan(j\pi/n)}$. Donc :

$T_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{i}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{\tan(j\pi/n)}$. La dernière somme peut se calculer en remarquant que

$\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{\tan(j\pi/n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{\tan((n-j)\pi/n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{\tan(\pi - j\pi/n)} = -\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{\tan(j\pi/n)}$ puisque $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Donc $T_n = \dfrac{n-1}{2}$.

Exercice 35

Déterminer l'image du cercle unité $\mathcal{C}(O;1)$ par l'application $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\} \longmapsto \dfrac{1}{1-z}$.

►Correction.

Prenons z sous forme trigonométrique : $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0, 2\pi[$. On transforme $f(z)$:

$f(e^{i\theta}) = \dfrac{1}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{ie^{-i\theta/2}}{2\sin(\theta/2)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{\tan(\theta/2)}$. En étudiant la fonction $\theta \in]0, 2\pi[\longmapsto \dfrac{1}{2\tan(\theta/2)}$ on a $\left\{\dfrac{1}{\tan(\theta/2)}, \quad \theta \in]0, 2\pi[\right\} = \mathbf{R}$. Donc $f(\mathcal{C}(O,1))$ est la droite verticale $x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 36

Résoudre l'équation $\quad \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z^2+z+1}\right) = 0 \quad$ pour $z \in \mathbf{C}$.

Préciser notamment l'ensemble de résolution.

►Correction.

On résout sur $\mathbf{C} \setminus \{j, \bar{j}\}$. L'équation est équivalente à

$$\frac{1}{z^2+z+1} = \overline{\left(\frac{1}{z^2+z+1}\right)} \iff z^2+z+1 = \overline{z^2+z+1} \iff z^2+z+1 \in \mathbf{R}.$$

En prenant z sous sa forme algébrique $z = x + iy$, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, a $2xy + y = (2x+1)y = 0$.

L'ensemble cherché est donc $\{y = 0\} \bigcup \left\{x = -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Exercice 37

Soit $a \in \mathbf{C}$ de module un. On note $z_1, ..., z_n$ le nombre de solutions de $z^n = a$.

1) Donner une expression explicite de $(1+z_k)^n$ en fonction de $\alpha = \arg(a)$.

2) En déduire que les points M_k d'affixes $(1+z_k)^n$ sont alignés.

►Correction.

1) On résout l'équation $z^n = a$ en $z_k = e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ pour $k = 0, ..., n-1$. Ainsi, en mettant l'angle moitié en facteur, on trouve $(1+z_k)^n = \left(2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}\right)^n = (-1)^n 2^n \cos^n\left(\dfrac{\alpha}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

2) En fonction du signe du cosinus, on voit que l'on a $\arg((1+z_k)^n) \equiv \dfrac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$. Les complexes sont donc situés sur la droite tourné de $\alpha/2$ par rapport à $(O, \vec{i})$ passant par O, ils sont alignés.

Exercice 38

1) Montrer que $(a, b) \sim (c, d) \quad \iff \quad a + d = b + c \quad$ est une relation d'équivalence sur $\mathbf{N}^2$.

2) Montrer que l'ensemble des classes $\mathbf{N}^2/\sim$ est en bijection avec $\mathbf{Z}$.

3) Montrer qu'il existe une injection $i : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^2/\sim$ qui vérifie pour tout $(m, n) \in \mathbf{N}^2$, $i(m+n) = i(m) + i(n)$.

►Correction.

1) On vérifie très facilement les axiomes de réflexivité et de symétrie. Soit maintenant $((a, b), (c, d), (e, f)) \in (\mathbf{N}^2)^3$ tel que $(a, b) \sim (c, d)$ et $(c, d) \sim (e, f)$. Alors $a + d = b + c$ et $c + f = d + e$. Donc

$$a + f + d + c = b + d + e + c, \quad a + f = b + e,$$

après simplifications.

2) On considère l'application $\Phi : C_{(a,b)} \in \mathbf{N}^2/\sim \longmapsto a-b \in \mathbf{Z}$.
Montrons qu'il s'agit d'une bijection. Pour l'injectivité, soit $((a,b),(c,d)) \in (\mathbf{N}^2)^2$ tel que $a-b=c-d$, alors $a+d=b+c$ ce qui fournit $(a,b)\sim(c,d)$ et donc de manière équivalente $C_{(a,b)}=C_{(c,d)}$.
Pour la surjectivité, si $k\in\mathbf{Z}$ on vérifie facilement que $\Phi\left(C_{(k+1,1)}\right)=k$.
Cette application permet de construire $\mathbf{Z}$ *en posant* $\mathbf{Z}=\Phi(\mathbf{N}^2/\sim)$.

3) On pose $i : m\in\mathbf{N}\longmapsto C_{(m,1)}\in\mathbf{N}^2/\sim$. L'application est injective puisque si $C_{(m,0)}=C_{(m',0)}$ avec $(m,m')\in\mathbf{N}^2$, on a par définition $m=m'$.
Plus généralement, n'importe quelle image du type (m,l) *avec* $l\in\mathbf{N}$ *convient comme définition de* i.
De plus $i(m+m')=C_{(m+m',0)}=C_{(m,0)}+C_{(m',0)}$.

Exercice 39

On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module un et on considère la relation binaire sur $\mathbf{C}$ définie par
$x\sim y \iff xy^{-1}\in\mathbf{U}$ ou $x=y=0$.

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence

2) Montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des classes $\mathbf{C}/\sim$ et $\mathbf{R}^+$.

►Correction.

1) Réflexivité : si $x\sim x$: si $x=0$, c'est trivial. Sinon $|xx^{-1}|=1\in\mathbf{U}$.
Symétrie : si $x\sim y$, alors soit $x=y=0$ et $y=x=0$ donc $y\sim x$, soit $x\neq 0$ et $y\neq 0$. Et comme $|xy^{-1}|=1$ on a aussi $\dfrac{1}{|xy^{-1}|}=1=|x^{-1}y|$ donc $y\sim x$.
Transitivité : soit $(x,y,z)\in\mathbf{C}^3$ tel que $x\sim y$ et $y\sim z$ d'autre part. Alors $|xz^{-1}|=|xy^{-1}||yz^{-1}|=1$ d'après les propriétés sur les modules, ou alors $x=y=0$ et $y=z=0$ donc $x=z=0$ et $x\sim z$ dans tous les cas.

2) C'est donc une relation d'équivalence. On définit de manière naturelle une application Φ en posant $\Phi(C_y)=|y|$ pour toute classe d'équivalence C_y de représentant $y\in\mathbf{C}$.
Le module étant positif, on définit bien une application de $\mathbf{C}/\sim\longrightarrow\mathbf{R}^+$.
Elle est d'une part injective : si $\Phi(C_x)=\Phi(C_y)$ pour $(x,y)\in\mathbf{C}^2$, alors $|x|=|y|$. Supposons $x\neq 0$ et $y\neq 0$, alors $|xy^{-1}|=1$ et $x\sim y$ donc $C_x=C_y$. Sinon $x=y=0$ et $x\sim y$ donc $C_x=C_y$. Donc Φ est injective.
D'autre part elle est surjective : prenant $\rho\in\mathbf{R}^+$ fixé, on vérifie que $\Phi(C_\rho)=\rho$.

Exercice 40

Soient A, B deux parties non vides majorées de $\mathbf{R}$. On forme $A+B=\{a+b,\quad (a,b)\in A\times B\}$.
Montrer que $A+B$ est majorée et déterminer $\sup(A+B)$.

►Correction.
Remarquons tout d'abord que $A+B$, A et B admettent une borne supérieure : elles sont majorées et non vides. Pour $A+B$, l'existence d'un majorant découle de ce qui suit.
Soit $(a,b)\in A\times B$. Alors $a+b\leqslant \sup A+\sup B$. Donc $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$, $\sup(A+B)$ est le plus petit, donc $\sup(A+B)\leqslant\sup A+\sup B$. Et on a même égalité.
On essaie de mettre $\sup(A+B)$ à droite de l'inégalité. Pour tout $(a,b)\in A\times B$, $a=a+b-b\leqslant\sup(A+B)-b$. Donc $\sup A\leqslant\sup(A+B)-b$ et donc $b\leqslant\sup(A+B)-\sup A$ pour tout $b\in B$, donc à nouveau on a $\sup B\leqslant\sup(A+B)-\sup A$. Ce qui est le résultat attendu.

Exercice 41

1) Soit $k\in\mathbf{N}^*$. On définit sur $\mathbf{Z}$ une fonction $f(n)=\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}\left(\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor-\frac{n-i}{k}\right)$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$.

Montrer que f est k-périodique. En déduire que pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}\left(\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor-\frac{n-i}{k}\right)=0$.

2) En déduire qu'il existe des polynômes $P_0,\dots,P_{k-1}$ tels que
$\forall n\in\mathbf{N},\quad \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor^k=P_0(n)+\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor P_1(n)+\dots+\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor^{k-1}P_{k-1}(n)$. Les calculer explicitement pour $k=2$.

►Correction.

1) Soient $k,n\in\mathbf{Z}$, alors $f(k+n)=\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}\left(\left\lfloor\frac{n}{k}+1\right\rfloor-\frac{n-i}{k}-1\right)$, comme $\left\lfloor\frac{n}{k}+1\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor+1$, on obtient $f(k+n)=f(n)$.
Pour montrer que f est nulle, il suffit donc de justifier que f l'est pour les $n\in\{0,\dots,k-1\}$.
En effet soit $n\in\{0,\dots,k-1\}$, alors $\frac{n}{k}\in[0,1[$ et $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor=0$. La fonction f est donc égale à $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}\left(-\frac{n-i}{k}\right)$. Mais si $0\leqslant n\leqslant k-1$, alors i vaut nécessairement n dans le produit, et donc le produit entier nul comme l'un de ses facteurs l'est.

2) La seconde question dans le cas $k=2$ fournit

$$f(n)=\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\frac{n}{2}\right)\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\frac{n-1}{2}\right)=0,$$

en développant on obtient $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\frac{n-1}{2} + \frac{n}{2} \right) + \frac{n-1}{2} \frac{n}{2}$. P_0 semble être de degré 2, et P_1 de degré 1 dans ce cas.
On généralise le résultat ensuite en constatant que le produit f est un polynôme, nul d'après la question **1)**, en $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ de degré k à coefficients des polynômes en n. Le résultat suit en passant les termes de degré $< k$ à droite.

Exercice 42
On note A la partie de $\mathbf{R}$ définie par $A = \left\{ \frac{x^2+2}{x^2+1}, x \in \mathbf{R} \right\}$.
Déterminer, si elles existent, les quantités suivantes : sup A, inf A, min A et max A.

►Correction.
On commence par étudier la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2+2}{x^2+1}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$.
On peut remarquer que $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1}$. Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geqslant 1$. Comme $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, on déduit que $\inf A = 1$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure. Comme f est paire et décroissante sur $\mathbf{R}^+$ croissante sur $\mathbf{R}^-$, le maximum s'il existe est en 0. On a $f(x) \leqslant 2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $f(0) = 2$. Donc 2 est un maximum et c'est aussi sup A.

Exercice 43
1) Simplifier la fonction f définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \arctan x$.

2) En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

►Correction.
1) Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme arctan est définie sur $\mathbf{R}$, la fonction f est bien définie.
On pourrait penser calculer $\tan f(x)$, *le problème est que l'on va démontrer que pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$...
On se range plutôt du côté d'un calcul de dérivée. f est dérivable en tant que somme et composée de fonctions dérivables, et un calcul de dérivée montre que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$, la fonction est donc constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

2) En particulier $f(1) = \frac{\pi}{2} = 2\arctan\left(\sqrt{2}-1\right) + \arctan 1 = 2\arctan\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{\pi}{4}$.Donc $\frac{\pi}{8} = \arctan\left(\sqrt{2}-1\right)$, comme $\frac{\pi}{8} \in -\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sqrt{2}-1 = \tan\frac{\pi}{8}$.

Exercice 44
On note A la partie de $\mathbf{R}$ définie par $A = \left\{ \frac{x^2+2}{x^2+1}, x \in \mathbf{R} \right\}$.
Déterminer, s'ils existent, les quantités suivantes : sup A, inf A, min A et max A.

►Correction.
Il n'est pas trop dur de se convaincre que

$$\sup(A \cup B) = \max\left\{\sup A, \sup B\right\}.$$

Montrons-le.
Soit $x \in A \cup B$, alors soit si $x \in A$ on a $x \leqslant \sup A$, si $x \in B$, alors $x \leqslant \sup B$. Donc $x \leqslant \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$.
Ceci prouve que $A \cup B$ est majorée, elle est bien sûr non vide, donc possède une borne supérieure. De plus $\max\left\{\sup A, \sup B\right\}$ est un majorant de $A \cup B$ donc $\sup(A \cup B) \leqslant \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$.
Montrons qu'il y a en fait égalité. Soit donc $\varepsilon > 0$. Montrons que $\max\left\{\sup A, \sup B\right\} - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A \cup B$, *i.e.* montrons qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que $\max\left\{\sup A, \sup B\right\} - \varepsilon \leqslant x \leqslant \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$ (caractérisation de la borne supérieure).
On se place par exemple dans le cas où $\sup A \geqslant \sup B$. On sait qu'il existe $x \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon \leqslant x \leqslant \sup A$ par caractérisation de la borne pour A, le cas $\sup A \leqslant \sup B$ se traite donc de la même façon.

Exercice 45
Soit $a > 0$. Exprimer uniquement à l'aide de $\sqrt{a+1}$ le réel $\cosh\left(\ln\left(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}\right)\right)$.

►Correction.
C'est un simple calcul. Par définition
$\cosh\left(\ln\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{a-(a+1)}\right) = \sqrt{a+1}$.

Exercice 46 (Lien entre arctan **et** arcsin**)**
Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\quad \arctan x = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

►Correction.

On calcule la dérivée de $f(x) = \arctan x - \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$, puisque $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in [-1,1]$. Cette fonction est bien dérivable comme différence et composée de fonctions dérivables.
Et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 0$ après un calcul de dérivée. Donc f est constante, $f(0) = 0$ donc f est identiquement nulle.
La formule est démontrée.

Exercice 47 (Diamètre d'une partie de R.)
Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbf{R}$.

1) On appelle *diamètre de* A la quantité $\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} |x-y|$. Montrer que l'application δ est bien définie.

2) Montrer que $\delta(A) = \sup A - \inf A$.

►Correction.

1) Comme, en distinguant les cas, on a que pour tous $x, y \in A$, $|x-y| \leqslant \sup A - \inf A$, la partie $\{|x-y|, x, y \in A\}$ est bien majorée, non vide puisque A l'est, donc possède une borne supérieure. La fonction diamètre est donc bien définie.

2) D'après ce qui précède on a trivialement $\delta(A) \leqslant \sup A - \inf A$. Montrons que $\sup A - \inf A$ est en fait le plus petit des majorants.
En effet soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe un $|x-y| \in \mathbf{R}^+$ avec $(x,y) \in A^2$ tel que

$$\sup A - \inf A - \varepsilon \leqslant |x-y| \leqslant \sup A - \inf A.$$

Quitte à permuter x et y, cela revient à chercher $(x,y) \in \mathbf{R}^+$ tel que

$$\sup A - \inf A - \varepsilon \leqslant x - y \leqslant \sup A - \inf A.$$

Mais, il existe $x \in A$ tel que $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant x \leqslant \sup A$ et $y \in A$ tel que $\inf A \leqslant y \leqslant \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$. Soit donc $-\inf A \geqslant -y \geqslant -\inf A - \frac{\varepsilon}{2}$, en sommant on obtient l'inégalité désirée.

Exercice 48 (Argument et arctangente)
Soit $z = a + ib \in \mathbf{C}$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbf{R}$. On note $\arg z$ l'argument de z dans $]-\pi,\pi]$.

1) Montrer que $\arg z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

2) En déduire les égalités suivantes :

a. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad 2\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan\left(2x\sqrt{1+x^2}\right), \quad 2\arctan(\operatorname{th} x) = \arctan \operatorname{sh}(2x),$

b. $\forall x \in]-1,1[, \quad 2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$

3) Cas général — soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Donner une formule pour $2\arctan\left(\frac{f(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}\right)$ et la démontrer.

►Correction.

1) Par définition de l'argument $\theta = \arg(z) \in]-\pi,\pi]$, on a $a = |z|\cos\theta$ et $b = |z|\sin\theta$. Donc $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Mais comme $a > 0$, on a $\cos\theta > 0$ donc $\theta \in -\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on peut exprimer θ via $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

2) On utilise donc l'interprétation de l'argument.
On a pour tout $x > 0$, $2\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 2\arg\left(\sqrt{1+x^2}+ix\right) = \arg\left((\sqrt{1+x^2}+ix)^2\right) = \arg\left(1+2ix\sqrt{1+x^2}\right)$, car $\sqrt{1+x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Donc comme $1 > 0$, on obtient la formule $2\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$.
Ensuite, puisque $\operatorname{ch}(x) > 0$,
$2\arctan \operatorname{th} x = 2\arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right) = 2\arg(\operatorname{ch}(x)+i\operatorname{sh}(x)) = \arg((\operatorname{ch}(x)+i\operatorname{sh}(x))^2) = \arg(1+2i\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x) = \arg(1+i\operatorname{sh}(2x)) = \arctan \operatorname{sh}(2x)$.
La même technique permet d'arriver à l'égalité de **b)**.

3) Les mêmes techniques permettent d'établir
$2\arctan\left(\frac{f(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}\right) = \arctan\left(2f(x)\sqrt{1+f(x)^2}\right)$, notamment car $\sqrt{1+f(x)^2} > 0$.

Exercice 49
Établir que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |\arctan(\operatorname{sh} x)| = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$

►Correction.
Remarquons d'abord que les deux membres sont pairs. Il suffit donc d'établir que

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \quad \arctan(\operatorname{sh} x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$

Or, considérons la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) - \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$, elle bien définie, dérivable en tant que somme et composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$. Ainsi f est constante et comme $f(0) = 0$, la fonction f est nulle.

Exercice 50

Soit $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto x \cdot e^x \in \mathbf{R}$.

1) Déterminer $f(\mathbf{R})$ et un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$ contenant 0 tel que $f_{|\mathrm{I}} : x \in \mathrm{I} \longmapsto f(x)$ soit bijective. On note $g = f_{|\mathrm{I}}{}^{-1}$ la bijection réciproque.

2) Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

►Correction.

1) f est dérivable sur $\mathbf{R}$. Et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = e^x(1+x)$. Donc f est croissante sur $[-1, \infty[$ et décroissante sur $]-\infty, -1[$.
On déduit alors $f(\mathbf{R}) = [-e^{-1}, \infty[$, et que f est bijective de $\mathrm{I} = [-1, \infty[$ vers $[-e^{-1}, \infty[$ car strictement monotone, continue et $\lim_{\infty} f = \infty$.

2) Comme f' ne s'annule jamais sauf en -1, $g = f_{|\mathrm{I}}{}^{-1}$ est dérivable au moins sur $]-1, \infty[$ et comme $g(0) = 0$, on a

$$\left(f_{|\mathrm{I}}{}^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{(f_{|\mathrm{I}})'(0)} = 1.$$

Exercice 51

On souhaite déterminer les $x \in \mathbf{R}^*$ tels que $\quad \arctan(x-1) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{19}{8}\right)$.

1) On note f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \arctan(x-1) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que l'équation admet une unique solution plus grande que un.

2) Résoudre l'équation.

►Correction.

1) L'équation est équivalente à $f(x) = \arctan\frac{19}{8}$, avec $x \in \mathbf{R}^*$.
Or, f est dérivable en tant que différence de fonctions dérivables et $f'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+x^2} > 0$. Donc f est strictement croissante, continue et $\lim_{-\infty} f = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{\infty} f = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{0<} f = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{0>} f = -\frac{3\pi}{4}$. Donc comme $\arctan\left(\frac{19}{8}\right) \in]0, \pi/2[$, l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation sont garanties sur $[1, \infty[$ car $f(1) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4} \leqslant \arctan\left(\frac{19}{8}\right)$.

2) On résout donc $f(x) = \arctan\left(\frac{19}{8}\right)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
Si $x \in \mathbf{R}^*$ est une solution, alors $\frac{19}{8} = \frac{x-1-\frac{1}{x}}{1+(x-1)\frac{1}{x}}$, d'où $19(2x-1) = 8\left(x^2 - x - 1\right)$. On arrive à une équation du second degré :

$$8x^2 - 46x + 11 = 0 = (4x-1)(2x-11).$$

Ici deux solutions sont candidates $\frac{1}{4}$ et $\frac{11}{2}$. La première étant plus petite que un, on a seulement une seule solution qui est $\frac{11}{2}$.

Exercice 52 (Primitive d'une bijection réciproque)

Soit f un C^1- *difféomorphisme*, *i.e.* $f \in C^1(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ et f est bijective de I dans $\mathbf{R}$ avec I un intervalle réel. On suppose que f' ne s'annule pas.

1) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur I.

2) On considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbf{R}$, par $g(x) = xf^{-1}(x) - \mathrm{F}(f^{-1}(x))$. Calculer sa dérivée.

3) Qu'en déduit-on ?

►Correction.

1) La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$, donc admet des primitives sur ce même intervalle.

2) g est bien définie car f^{-1} est à valeurs dans I, elle est de plus dérivable. Donc g est dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a
$g'(x) = f^{-1}(x) + \frac{x}{f' \circ f^{-1}(x)} - \frac{x}{f' \circ f^{-1}(x)} = f^{-1}(x)$.

3) Comme $g' = f^{-1}$, la fonction g est une primitive de f^{-1}

Exercice 53
Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ sur un intervalle à préciser. ♣ Indication – Essayer le changement de variable $u = \sqrt[6]{x}$.

►Correction.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ est bien définie sur $\mathbf{R}^{+*}$. De-même pour la fonction $x \in \mathbf{R}^{+*} \longmapsto \sqrt[6]{x} = e^{\frac{1}{6}\ln x}$, qui est de classe C^1 sur ce même intervalle.
Effectuons le changement $u = e^{\frac{1}{6}\ln x}$ et donc $u^3 = \sqrt{x}$, $u^2 = \sqrt[3]{x}$. On a $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{6x}u\,\mathrm{d}x$. On obtient alors
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int^{x^{1/6}} \frac{u^3}{1+u}\,\mathrm{d}u = 6\int^{x^{1/6}} \left(u^2-u-1+\frac{1}{1+u}\right) = 6\left(\frac{1}{3}(\sqrt[6]{x})^3 - \frac{1}{2}(\sqrt[6]{x})^2 - \sqrt[6]{x} + \ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right).$$

Exercice 54 (Convexité de l'exponentielle)
Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(e^a+e^b\right)$.

►Correction.
On peut par exemple fixer $b \in \mathbf{R}$ et étudier la fonction $f_b : x \in \mathbf{R} \longmapsto e^{\frac{x+b}{2}} - \dfrac{1}{2}\left(e^x+e^b\right)$. Elle est dérivable de dérivée $f_b'(x) = \dfrac{1}{2}e^{x/2}\left(e^{b/2}-e^{x/2}\right)$, qui est donc positive sur $]-\infty, b]$ et négative sur $[b, \infty[$. Comme $f_b(b) = 0$, la fonction f_b est négative et l'inégalité est démontrée.

Exercice 55
1) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbf{R}^{+*}$.

2) Soit $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$. Déterminer une primitive de $x \longmapsto x^\alpha \ln x$ sur $\mathbf{R}^{+*}$. ♣ Indication – Essayer un changement de variable du type $x = t^\beta$ avec $\beta \in \mathbf{R}$ à préciser.

►Correction.
1) L'existence de primitives sur $\mathbf{R}^{+*}$ est garantie par la continuité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur ce même intervalle.

2) Le cas $\alpha = -1$ vient donc d'être traité en question **1)**.
Si $\alpha \neq -1$, alors posons $x = t^\beta$ avec $\beta \in \mathbf{R}$. Ce changement est bien défini sur $\mathbf{R}^{+*}$, de classe C^1, et sur ce même intervalle on a $t = x^{1/\beta}$. Alors
$\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = \int^{x^{1/\beta}} t^{\alpha\beta}\beta(\ln t)\frac{\beta}{t}e^{\beta\ln t}\,\mathrm{d}t = \beta^2\int^{x^{1/\beta}} t^{\alpha\beta+\beta-1}\ln t\,\mathrm{d}t.$
De manière naturelle on prend β satisfaisant $\alpha\beta+\beta-1 = 0$ soit $\beta = \dfrac{1}{\alpha+1}$. On obtient alors
$\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^2\int^{x^{1/\beta}} \ln x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^2\left(\frac{1}{\beta}x^{1/\beta}\ln x - x^{1/\beta}\right).$
On aurait pu aussi intégrer par parties.

Exercice 56
Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle *Gundermannien en* x la quantité $\mathrm{G}d(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t}$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\quad \mathrm{G}d(x) = \arcsin(\mathrm{th}(x))$. La fonction $\mathrm{G}d$ est-elle bijective ?

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\quad \mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \tan\left(\dfrac{\mathrm{G}d(x)}{2}\right)$.

Le Gundermannien fournit donc un autre lien, en plus des nombres complexes, entre la trigonométrie hyperbolique et circulaire.

►Correction.
1) Considérons la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{G}d(x) - \arcsin(\mathrm{th}(x))$, elle est bien définie pour tout $x \in \mathbf{R}$, puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\left|\mathrm{th}(x)\right| < 1$ et arcsin est définie sur $[-1,1]$. Elle est de plus dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}}\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 0$, et comme $f(0) = 0$, elle est identiquement nulle. D'où la formule.
On a donc aussi montré au passage que $\arcsin\mathrm{th}$ est une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$.

2) Calculons $\tan\left(\dfrac{\arcsin\mathrm{th}(x)}{2}\right)$. On utilise la formule $\tan\left(\dfrac{X}{2}\right) = \dfrac{\sin X}{\cos X+1}$ valable pour tout $X \notin \{\pi+2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Elle s'obtient en multipliant haut et bas par $\cos(X/2)$ dans la définition de la tangente.
On obtient alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$\tan\left(\dfrac{\arcsin\mathrm{th}(x)}{2}\right) = \dfrac{\sin\arcsin\mathrm{th}(x)}{1+\cos\arcsin\mathrm{th}(x)} = \dfrac{\mathrm{th}\,x}{1+\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} = \dfrac{\mathrm{th}\,x\,\mathrm{ch}\,x}{1+\mathrm{ch}\,x} = \mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, en utilisant l'analogue hyperbolique de la formule citée plus haut.
Le Gundermannien fournit donc un autre lien, en plus des nombres complexes, entre la trigonométrie hyperbolique et circulaire. Oui, l'autre parallèle est donné par : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}(ix) = \cos(x)$.

Exercice 57
Trouver tous les entiers $n \in \mathbf{Z}$ solutions de
$\begin{cases} n & \equiv 5 \pmod 7 \\ n & \equiv 8 \pmod{11} \end{cases}$.

►Correction.
Si n est une solution, alors par différence il existe $(k,l) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $7k - 11l = 3$. Or, $\mathrm{PGCD}(7,11) = 1$, donc il n'y a pas de solution d'après le théorème de Bezout.

Exercice 58
Soit $p \in \mathbf{P}$.

1) Montrer que $\forall x \in \{1, ..., p-1\}, \quad \exists! x^{-1} \in \{1, ..., p-1\} \quad / \quad x x^{-1} \equiv 1 \pmod p$. On dit que x *est inversible modulo* p.
Que valent 1^{-1} et $(p-1)^{-1}$? Que dire de l'application $x \in \{1, ..., p-1\} \longmapsto x^{-1} \in \{1, ..., p-1\}$?

2) En déduire le théorème de Wilson : $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

►Correction.

1) L'égalité en congruence est équivalente à l'existence d'un entier $k \in \mathbf{Z}$ tel que
$xx^{-1} - 1 = pk$. D'après le théorème de Bezout, il existe un couple $(y,k) \in \mathbf{Z}^2$ tel que
$xy - pk = 1$ (étant donné que p est premier on a $\mathrm{PGCD}(p,x) = 1$). Notons $x^{-1} \in \{1, ..., p-1\}$ le reste modulo p de y. Alors $y = x^{-1} + pl$ pour un $l \in \mathbf{Z}$, en substituant dans l'identité précédente on obtient $(x^{-1} + pl)x - pk = 1 = xx^{-1} - p(k - lx)$. L'entier x^{-1} satisfait les conditions de l'énoncé.
Supposons que x_1 et x_2 satisfont l'assertion de l'énoncé. Alors $p \mid (x_1 - x_2)x$, comme $\mathrm{PGCD}(x,p) = 1$, le lemme de Gauss fournit $p \mid x_1 - x_2$, donc $x_1 = x_2 + pm$ pour un certain $m \in \mathbf{Z}$. Comme $(x_1, x_2) \in \{1, ..., p-1\}^2$, nécessairement $m = 0$ et $x_1 = x_2$.
$x \longmapsto x^{-1}$ est donc bien une application. Elle est de plus bijective, en effet :
injective car si $x^{-1} = y^{-1}$ pour $(x,y) \in \{1, ..., p-1\}$, on a l'existence d'un couple $(k,l) \in \mathbf{Z}^2$ vérifiant $x^{-1}(x-y) = p(k-l)$, autrement dit comme $\mathrm{PGCD}\left(p, x^{-1}\right) = 1$, on a $p \mid x - y$ toujours d'après le lemme de Gauss. Et $x = x'$ puisque $(x,x') \in \{1, ..., p-1\}$.
Surjective en vérifiant que pour tout $x \in \{1, ..., p-1\}$, on a $x = (x^{-1})^{-1}$.
On vérifie finalement que $1^{-1} = 1$ et $(p-1)^{-1} = p-1$.

2) Ainsi regardons le produit $1 \times (2 \times ... \times (p-2)) \times (p-1) = (p-1)!$. Comme l'application $x \longmapsto x^{-1}$ réalise une bijection de $\{1, ..., p-1\}$ vers $\{1, ..., p-1\}$, chacun des termes du produit se regroupe avec un autre, dont le produit sera congru à -1 modulo p. Étant donné que 1 et $(p-1)$ sont d'inverse eux-mêmes (cf. fin de la question **1)**), on aura alors

$$(p-1)! \equiv 1 \times (1)^{(p-3)/2} \times (p-1) \equiv -1 \pmod p.$$

Exercice 59
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ qui est à la fois un carré parfait et un cube parfait.
Montrer que n est la puissance sixième d'un entier.

►Correction.
Soit p un facteur premier de n. Alors comme n est un carré parfait $2 \mid \mathrm{V}_p(n)$. De-même c'est un cube parfait, donc $3 \mid \mathrm{V}_p(n)$.
Finalement $6 \mid \mathrm{V}_p(n)$ pour tout facteur premier p de n et donc n est une puissance sixième.

Exercice 60
Montrer que $2^{123} + 3^{121}$ est divisible par 11.

►Correction.
D'abord, $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$, et $123 = 5 \times 24 + 3$, donc $2^{123} \equiv (-1)^{24}(-3) \equiv -3 \pmod{11}$.
Même chose pour le deuxième terme : $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$, $121 = 5 \times 24 + 1$, donc $3^{121} \equiv 3 \pmod{11}$, donc finalement

$$2^{123} + 3^{121} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Exercice 61
Soient $(a,b) \in \mathbf{Z}$, et $n \in \mathbf{N}^*$. On s'intéresse à l'équation $\quad ax \equiv b \pmod n \quad (\star)$, d'inconnue $x \in \mathbf{Z}$.

1) Donner une condition nécessaire d'existence d'une solution.

2) On suppose à présent que $\mathrm{PGCD}(a,n) \mid b$.
   a. Montrer à l'aide du théorème de Bezout que $(\star)$ possède une solution x_0.
   b. Résoudre alors $(\star)$.

3) Résoudre l'équation $\quad 7x \equiv 3 \pmod{17}$ d'inconnue $x \in \mathbf{Z}$.

►Correction.

1) Soit $x \in \mathbf{Z}$ une solution de $(\star)$. Alors nécessairement $\mathrm{PGCD}(n,a) \mid b$ en écrivant la congruence.

2) **a.** Supposons que $\mathrm{PGCD}(a,n) \mid b$. Alors il existe $l \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathrm{PGCD}(a,n)\,l = b$. Or, d'après Bezout, il existe $(u,v) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $au+nv = \mathrm{PGCD}(a,n)$. Ainsi
$(au+nv)l = b$ et $x_0 = ul$ est une solution de $(\star)$.

b. Déduisons-en l'ensemble entier des solutions. Fixons déjà x_0 vérifiant $ax_0 \equiv b \pmod n$. Par différence $a(x-x_0) \equiv 0 \pmod n$, ainsi $n \mid a(x-x_0)$ et $\frac{n}{\mathrm{PGCD}(a,n)} \mid \frac{a}{\mathrm{PGCD}(a,n)}(x-x_0)$. On peut alors appliquer le lemme de Gauss et on obtient $\frac{n}{\mathrm{PGCD}(a,n)} \mid x-x_0$. Donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = x_0 + \frac{kn}{\mathrm{PGCD}(a,n)}$. Inversement on vérifie facilement à l'aide des propriétés sur les congruences que x du type ci-dessus satisfait $ax \equiv b \pmod n$. Finalement l'ensemble solution est $\left\{x_0 + \frac{kn}{\mathrm{PGCD}(a,n)}, \quad k \in \mathbf{Z}\right\}$ avec x_0 une solution particulière.

Notez l'analogue du résultat avec les équations différentielles. Ce n'est pas surprenant, le membre de gauche étant linéaire en x. De manière générale une solution particulière permet dans ce type d'équation de supprimer le second membre b en faisant la différence : on tombe alors sur la notion de solution homogène.

3) Cherchons d'abord une solution particulière. On a $\mathrm{PGCD}(7,17) = 1$, or $1 \mid 3$ donc l'équation admet des solutions. En s'inspirant de **2)**, on voit que $x_0 = 3 \times 5 = 15$ car $5 \times 17 - 2 \times 17 = 1$ est une solution particulière.
Donc l'ensemble des solutions est

$$\{15 + 17k, \quad k \in \mathbf{Z}\}\,.$$

Exercice 62

On souhaite démontrer que l'équation $\quad (\star) \quad y^2 = x^3 + 7$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ n'a pas de solution.
Supposons qu'elle en possède une.

1) Montrer que $x \in 2\mathbf{Z}+1$.

2) Factoriser x^3+8. En déduire que y^2+1 possède un facteur premier $p \in \mathcal{P}$ tel que $p \equiv 3 \pmod 4$.

3) Calculer y^{p-1} modulo p de deux manières différentes et conclure.

►Correction.

1) Constatons d'abord qu'un carré z^2 est forcément congru à 0 ou 1 modulo 4, 0 si z est pair et 1 si z est impair.
Ainsi si x est pair, $x^3 \equiv 0 \pmod 4$, et $x^3+7 \equiv 3 \pmod 4$, ce qui est donc absurde puisque y^2 ne peut être congru qu'à 0 ou 1 modulo 4.
Bref, si x est une solution x est forcément impair.

2) Cherchons les racines de $\mathrm{X}^3+8 = \mathrm{X}^3-(-2)^3$. Ce sont donc les éléments de $\{-2, -2j, -2j^2\}$ et

$$\mathrm{X}^3+8 = (\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+2j)(\mathrm{X}+2j^2).$$

On en déduit alors que $y^2+1 = x^3+8 = (x+2)(x+2j)(x+2j^2) = (x+2)(x^2-2x+4)$. Comme x est impair, $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ et $2x \equiv 2 \pmod 4$. Donc $x^2-2x+4 \equiv 3 \pmod 4$.
Notons $p_1^{m_1}....p_r^{m_r} = x^2-2x+4$ la décomposition en facteurs premiers de x^2-2x+4. Chacun des p_i est congru à 1 ou 3 modulo 4 (car pour tout $x \in \mathbf{Z}$, 2 n'est pas un facteur de x^2-2x+4, et tout nombre premier plus grand que 3 est impair ....).
Si pour tout $i \in \{1,..,r\}$, $p_i \equiv 1 \pmod 4$ alors $x^2-2x+4 \equiv 1 \pmod 4$ d'après les propriétés sur les congruences. Donc il existe nécessairement un facteur premier congru à 3 modulo 4.

3) D'une part, $y^{p-1} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod p$, d'après **3)**. Or $p-1 \equiv 2 \pmod 4$ donc $y^{p-1} \equiv -1 \pmod p$.
D'autre part, le théorème de Fermat nous donne $y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ si p ne divise pas y. Et c'es t bien le cas :
si $p \mid y$, alors $y^2+1 \equiv 1 \pmod p$, absurde car $y^2+1 \equiv 0 \pmod p$.
Conclusion — si $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ est une solution alors il existe un nombre premier $p \in \mathbf{P}$ tel que $2 \equiv 0 \pmod p$ et $p \equiv 3 \pmod p$, c'est absurde.
Donc $(\star)$ n'a pas de solution.

Exercice 63

Déterminer la nature et la limite éventuelle de $u_n = \dfrac{\left\lfloor 5n - \frac{1}{2}\right\rfloor^2}{\left\lfloor 4n + \frac{1}{2}\right\rfloor^2}$.

►Correction.
On encadre la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec la définition de la partie entière pour obtenir : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{\left(5n-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(4n+\frac{1}{2}\right)^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{\left(5n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(4n-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Le théorème d'encadrement donne alors la convergence de la suite et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{25}{16}$.

Exercice 64

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ une suite telle que $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{2^n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
On note pour tout $n \geqslant 0$, $m_n = \max\{|u_n|, |u_{n+1}|\}$.

1) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad m_{n+1} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right) m_n.$

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad m_n \leqslant e^2 m_0,$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

3) Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leqslant \dfrac{4e^2 m_0}{2^n}$, et $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

4) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

►Correction.

1) Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors
$m_{n+1} = \max\left\{|u_{n+1}|, |u_{n+2}|\right\} = \max\left\{|u_{n+1}|, \left|u_{n+1} + \frac{u_n}{2^n}\right|\right\} \leqslant \max\left\{|u_{n+1}|, \left|u_{n+1} + \frac{1}{2^n}u_n\right|\right\} \leqslant \max\left\{|u_{n+1}|, |u_{n+1}| + \frac{1}{2^n}|u_n|\right\} \leqslant \max\left(m_n, \left(1+\frac{1}{2^n}\right)m_n\right).$
Ce dernier terme est alors majoré par $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)m_n$.

2) En itérant la première question, on obtient que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad m_n \leqslant \prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)m_0 \leqslant \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{k=0}^{n-1} 1/2^k} m_0 = e^2 m_0$ puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $1 + x \leqslant e^x$.

Comme $u_n \leqslant m_n$ pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée elle aussi.

3) Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

La relation de récurrence nous permet d'écrire : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad |u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant \frac{e^2 m_0}{2^n}$. Ici, il faut donc découper la valeur absolue en somme de termes consécutifs. Notons d'abord k_n l'entier vérifiant $\varphi(n) = n + k_n$.
Alors, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,
$\left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leqslant \sum_{l=0}^{k_n-1} |u_{n+l+1} - u_{n+l}| \leqslant \sum_{l=0}^{k_n-1} \frac{|u_{n+l+1}|}{2^{n+l-1}} \leqslant \frac{2e^2 m_0}{2^n}\sum_{l=0}^{k_n-1}\frac{1}{2^l} \leqslant \frac{2e^2 m_0}{2^n}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$. C'est la majoration demandée.

4) Notons $l = \lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)}$. Alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}$:

$$|u_n - l| \leqslant \left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| + \left|u_{\varphi(n)} - l\right|.$$

Le premier terme converge vers 0 d'après **3)**, le second aussi par construction. Finalement $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite l.

Exercice 65

Étudier la nature de $\left(\sqrt{e^n + 2^n} - \sqrt{e^n + 1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

►Correction.
On multiplie par l'expression conjuguée : pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a
$\sqrt{e^n + 2^n} - \sqrt{e^n+1} = \dfrac{(\sqrt{e^n+2^n} - \sqrt{e^n+1})(\sqrt{e^n+2^n} + \sqrt{e^n+1})}{\sqrt{e^n+2^n} + \sqrt{e^n+1}} = \dfrac{e^n + 2^n - e^n - 1}{\sqrt{e^n+2^n} + \sqrt{e^n+1}}$. En mettant $\sqrt{e^n}$ en facteur au dénominateur, on trouve que la suite est convergente, de limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{2e^{n/2}} = \infty$.

Exercice 66 (Limite supérieure et inférieure)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On dit que a est *valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers a.

1) Montrer que les suites $(i_n)_{n\geqslant 0} = \left(\inf_{k\geqslant n} u_k\right)_{n\geqslant 0}$ et $(s_n)_{n\geqslant 0} = \left(\sup_{k\geqslant n} u_k\right)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes.

2) On note $\liminf_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} i_n$ et $\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} s_n$.
Discuter l'existence, et les valeurs le cas échéant, de $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$, $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n$ et $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n$.

3) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n$ sont respectivement les plus grandes et plus petites des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4) On admet la propriété suivante : $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge si et seulement si* $\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n$.
En déduire un critère de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de ses valeurs d'adhérences.

►Correction.

1) Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\{u_k : k \geqslant n+1\} \subset \{u_k : k \geqslant n\}$, on a par passage à la borne inférieure $i_n \leqslant i_{n+1}$. De-même on démontre que la suite s vérifie $s_{n+1} \leqslant s_n$.
Les suites sont respectivement croissantes et décroissantes, donc convergent, éventuellement vers une limite infinie.

2) La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas puisque les termes impairs et pairs ne convergent pas vers la même limite.
D'autre part, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\sup\{u_k : k \geqslant n\} = 1$ et $\inf\{u_k : k \geqslant n\} = -1$. Donc $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ et $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$.

3) — Soit φ une extractrice et $a \in \mathbf{R}$ une valeur d'adhérence. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc en particulier, pour $n \geqslant N$, on a $a \leqslant u_{\varphi(n)} + \varepsilon \leqslant \sup_{k \geqslant n} \{u_k\} + \varepsilon$ puisque $\varphi(n) \geqslant n$. Finalement pour tout $\varepsilon > 0$, $a \leqslant \limsup_{n\to\infty} u_n + \varepsilon$, reste à faire tendre ε vers 0 pour récupérer $a \leqslant \limsup_{n\to\infty} u_n$.
Le même raisonnement dans l'inégalité de gauche fournit $a \geqslant \liminf_{n\to\infty} u_n$.
— Par ailleurs, $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ sont des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. En effet, montrons-le pour $\limsup u_n$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $k_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $k \geqslant k_0(\varepsilon)$,
$\left|\sup_{l\geqslant k} u_l - \limsup u_n\right| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire de manière équivalente $-\varepsilon + \limsup u_n \leqslant \sup_{l\geqslant k} u_l \leqslant \varepsilon + \limsup u_n$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, choisissons $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ et notons $k_n = k_0(1/n)$.
Pour $k \geqslant k_n$, par caractérisation de la borne supérieure comme $-\dfrac{1}{n} + \limsup_{n\to\infty} u_n$ n'est pas un majorant un majorant de $\{u_l : l \geqslant k\}$, il existe donc un entier $l_n \geqslant k$ tel que $-\dfrac{1}{n} + \limsup_{n\to\infty} u_n \leqslant u_{l_n} \leqslant \dfrac{1}{n} + \limsup_{n\to\infty} u_n$.
On choisit $\varphi(1) = k_1$. Puis on construit φ par récurrence : $\varphi(n+1) = \max\left\{\varphi(n)+1; l_{n+1}\right\}$ de sorte que φ est strictement croissante et $u_{\varphi(n)} \longrightarrow_{n\to\infty} \limsup_{n\to\infty} u_n$.

4) Il vient de suite qu'une suite converge si et seulement si elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.
En effet, si elle en possède au moins deux elle ne converge pas.
Et réciproquement, si elle en possède une unique alors $\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n$ d'après le reste de l'exercice, le rappel conclut.

Exercice 67

Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\quad x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.
En introduisant la suite de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ définie par $z_n = x_n + i\,y_n$, montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent et déterminer leur limite.

►Correction.

On remarque tout d'abord que $z_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2} + i\dfrac{x_n + y_n}{2} = \dfrac{x_n}{2}(i+1) + \dfrac{y_n}{2}(i-1) = \dfrac{i+1}{2}\left(x_n + y_n\dfrac{i-1}{i+1}\right) = \dfrac{i+1}{2} z_n$.

La suite z est donc géométrique, et $z_n = \left(\dfrac{i+1}{2}\right)^2 z_0$. Comme $\left|\dfrac{i+1}{2}\right| < 1$, elle est convergente de limite nulle. Comme $z_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, par définition on a $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ et $y_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

Exercice 68

On note $u_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ la *partie fractionnaire* de $\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

1) Étudier $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n^2+n}$. En déduire que la suite n'a pas de limite.

2) Soit $(a,b) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}^*$ avec $a < b$. Étudier $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n^2b^2+2an}$.

►Correction.

1) Constatons d'abord que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_{n^2} = n - \lfloor n\rfloor = 0$. D'autre part : $n^2 + n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$,

d'où la majoration $n \leqslant \sqrt{n^2+n} \leqslant \sqrt{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2} = n + \dfrac{1}{2}$.

Donc $u_{n^2+n} = \sqrt{n^2+n} - n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \longrightarrow_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}$ en multipliant par l'expression conjuguée. Ainsi, on a deux suites extraites, $\left(n^2+n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est $\left(n^2\right)_{n\in\mathbf{N}}$, le long desquelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas la même limite, elle ne peut converger.

2) La suite généralise ce qu'on a fait précédemment avec $b = 1$ et $a = \dfrac{1}{2}$, et se traite de la même manière en écrivant $n^2b^2 + 2an = \left(nb + \dfrac{a}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$.
Et on trouve le nouvel encadrement suivant : $nb \leqslant \sqrt{n^2b^2+2an} \leqslant nb + \dfrac{a}{b}$.
Vu que $a < b$, le dernier terme est majoré par un. Donc

$$\left\lfloor\sqrt{n^2b^2+2an}\right\rfloor = nb,$$

et $u_{n^2b^2+2an} = \sqrt{n^2b^2+2an} - nb = \dfrac{2a}{\sqrt{b^2+2a\frac{1}{n}}+b} \longrightarrow_{n\to\infty} \dfrac{a}{b}$, de nouveau en multipliant par l'expression conjuguée et en divisant par n haut et bas.

Exercice 69

1) Montrer que l'équation : $x^n = \cos x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ possède une et une seule solution x_n pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

2) Déterminer la nature de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

►Correction.

1) Pour $n = 0$, l'unique solution est $x_0 = 0$.
Notons f_n la fonction $x \in [0,1] \longmapsto x^n - \cos x$ pour $n \geqslant 1$. Elle est dérivable sur $[0,1]$, et pour tout $x \in]0,1[$, on a $f_n'(x) = nx^{n-1} + \sin x > 0$. Elle donc continue, strictement monotone sur $]0,1[$, et $f_n(1) = 1 - \cos 1 > 0$, $f_n(0) = -1 < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires fournit alors l'existence et l'unicité de x_n satisfaisant $f_n(x_n) = 0$.

2) Regardons déjà la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Comme pour tout entier $n \geqslant 0$, $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - \cos(x_{n+1}) \geqslant x_n f_n(x_n) = 0$ et que f_n est croissante, nécessairement $x_{n+1} \leqslant x_n$. Cette suite est donc convergente de limite finie car minorée par 0.

Exercice 70

Nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$.

►Correction.
Technique classique : on multiplie par l'expression conjuguée. En effet, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,
$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}}{n^2+n+1-n^2+n-1} = \frac{n}{2n}\left(\sqrt{1+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\right) \longrightarrow_{n\to\infty} 1.$$

Exercice 71

Soit $p \in \mathbf{N}\setminus\{0,1\}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $\quad u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$ et $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1})$.

3) On pose pour $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers zéro.

4) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{S}_n$.

►Correction.

1) La première égalité découle d'un simple calcul en simplifiant les factoriels.

2) Constatons d'abord que $u_1 = \dfrac{1}{p+1}$. Alors on a bien $\mathrm{S}_1 = \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{1}{p-1}\left(1-\dfrac{2}{p+1}\right)$.
Supposons la formule vraie au rang n, alors $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n + u_{n+1} = \dfrac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1}) + u_{n+1} = \dfrac{1}{p-1}(1-(n+2)u_{n+1}) = \dfrac{1}{p-1}(1-(n+p+2)u$
C'est la formule au rang $n+1$.

3) Pour tout n, $v_n = \dfrac{p!n!}{(n+p-1)!} \leqslant \dfrac{p!}{n+1} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, écrire les factoriels explicitement par exemple pour voir la dernière majoration.

4) Comme $v_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, et que $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{p-1}(1-v_{n+1})$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{S}_n = \dfrac{1}{p-1}$.

Exercice 72

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ Montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{1+u_n^2} = 0 \quad \text{et} \quad (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est une suite bornée.}$$

►Correction.

$\Longrightarrow$|Bien sûr, si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Et comme pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{u_n}{1+u_n^2} \leqslant u_n$ le théorème d'encadrement fournit la deuxième partie de l'implication.

$\Longleftarrow$|Inversement, montrons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}(1+u_n^2) \leqslant \dfrac{u_n}{1+u_n^2}\left(1+\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}|u_n^2|\right) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

Exercice 73

Étudier la définition et la continuité éventuelle de $f : x \longmapsto (-1)^{\lfloor x\rfloor}\left(x - \lfloor x\rfloor - \dfrac{1}{2}\right)$.

►Correction.
La fonction est continue sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$.
Soit $k \in 2\mathbf{Z}$ un entier pair. Alors $\lim\limits_{x\to k,>} f(x) = \lim\limits_{x\to k,>}\left(x-\lfloor x\rfloor - \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, même chose à gauche :
$\lim\limits_{x\to k,<} f(x) = -\lim\limits_{x\to k,<}\left(x-(k-1)-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, bref f est continue également aux entiers pairs.
Soit $k \in 2\mathbf{Z}+1$, $\lim\limits_{x\to k,>} f(x) = -\lim\limits_{x\to k,>}\left(x-\lfloor x\rfloor-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to k,<} f(x) = \lim\limits_{x\to k,<}\left(x-(k-1)-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, elle l'est aussi aux entiers impairs.
Donc f est continue sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Exercice 74
Étudier la définition et la continuité éventuelle de $g : x \longmapsto \left(x(\ln x)^2+1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

►Correction.
La fonction g est définie sur $\mathbf{R}^{+*}\setminus\{1\}$ par sa forme exponentielle : $g(x)=\exp\left(\frac{1}{\ln x}\ln\left(x(\ln x)^2+1\right)\right)$. Elle est donc partout continue, en tant que composée, somme et produits de fonctions continues. Peut-on la prolonger en 1 par continuité ?
Oui, pour tout $x\in\mathbf{R}^{+*}\setminus\{1\}$, on a

$$g(x)=\exp\left(\frac{x(\ln x)^2}{\ln x}\underbrace{\frac{\ln\left(x(\ln x)^2+1\right)}{x(\ln x)^2}}_{\longrightarrow_{x\to 1}1}\right)\longrightarrow_{x\to 1} 1.$$ La fonction g, prolongée par 1 en 1, est donc continue sur $\mathbf{R}^{+*}$.

Exercice 75
Montrer que $\sin x = \ln x$ a une unique solution sur $\mathbf{R}^{+*}$.

►Correction.
On constate facilement que les éventuelles solutions ne peuvent être que dans $]0,e[$. Notons $f(x)=\sin x-\ln x$ définie sur $\mathbf{R}^{+*}$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, et $f(e)\leqslant 0$. Par ailleurs, f est continue et dérivable avec $f'(x)=\cos x-\frac{1}{x}$. Comme $x\cos x<x$ pour tout $x\in]0,e[$, la fonction f est décroissante strictement sur ce même intervalle. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation.

Exercice 76
On souhaite déterminer les fonctions continues $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ vérifiant $\forall x\in\mathbf{R}, f(x+2)-(a+b)f(x+1)+abf(x)=0$ avec $a,b\in\mathbf{R}^{+*}$.

1) Si $a\neq b$.

- **a.** Montrer que si α et β sont deux fonctions continues et 1-périodiques, alors la fonction $x\in\mathbf{R}\longmapsto \alpha(x)a^x+\beta(x)b^x$ est solution.
- **b.** Soit f une solution. En supposant qu'il existe α et β deux fonctions 1-périodiques telles que $f(x)=\alpha(x)a^x+\beta(x)b^x$ pour tout $x\in\mathbf{R}$, déterminer les fonctions α et β. ♣ Indication – on pourra évaluer f en $x+1$ et en x.
- **c.** Montrer que les fonctions α et β trouvées sont bien continues et 1-périodiques.

2) En s'inspirant de **1)**, traiter le cas $a=b$.

►Correction.

1) Si $a\neq b$.

- **a.** Notons $g^{\alpha,\beta}$ la fonction de l'énoncé. Alors pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $g^{\alpha,\beta}(x+2)-(a+b)g^{\alpha,\beta}(x+1)+abg^{\alpha,\beta}(x)=\alpha(x)a^{x+2}+\beta(x)b^{x+2}-(a+b)(\alpha(x)a^{x+1}+\beta(x)b^{x+1})+ab(\alpha(x)a^x+\beta(x)b^x)=0$ en développant.
- **b.** Avec f de cette forme, cherchons α et β par analyse-synthèse. En effet, pour tout $x\in\mathbf{R}$: $\alpha(x)a^{x+1}+\beta(x)b^{x+1}=f(x+1)$ et $\alpha(x)a^x+\beta(x)b^x=f(x)$, ce sont deux équations linéaires en α et β que l'on peut résoudre facilement :
$$\forall x\in\mathbf{R},\quad \alpha(x)=\frac{f(x+1)-bf(x)}{a^x(b-a)},\qquad \beta(x)=\frac{f(x+1)-af(x)}{b^x(b-a)}.$$
- **c.** Si $b\neq a$ et $a,b\in\mathbf{R}^{+*}$, les fonctions α et β sont bien continues puisque f l'est et $a^x,b^x\neq 0$ pour tout $x\in\mathbf{R}$.
Comme pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x+2)-bf(x+1)=af(x+1)+abf(x)$, on obtient la périodicité de α. Le calcul est similaire pour β.

2) On s'inspire des équations différentielles par exemple. On montrer que les fonctions $x\longmapsto\alpha(x)a^x+\beta(x)xa^x$ sont solutions avec α,β deux fonctions 1-périodiques. On trouve α et β en résolvant à nouveau un système :
$$\forall x\in\mathbf{R},\quad \alpha(x)=-\frac{xf(x+1)-a(x+1)f(x)}{a^x},\qquad \beta(x)=\frac{f(x+1)-af(x)}{a^{x+1}}.$$
On vérifie la continuité, la 1-périodicité. Pour $a=1$, on retrouve les polynômes de degré 1.

Exercice 77
Soient $n\in\mathbf{N}^*$ et $x\in\mathbf{R}^{+*}$. On définit la suite de fonctions $\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+x)}$. Dans la suite, pour toute fonction $f:\mathbf{R}^{+*}\to\mathbf{R}$ bornée, on note $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^{+*}}|f(x)|$.

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbf{R}^{+*}$, $\left(\varphi_n(x)+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}*}$ est décroissante puis que $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbf{N}*}$ converge pour tout $x\in\mathbf{R}^{+*}$.
On ote $\varphi(x)$ sa limite.

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbf{R}^{+*}$, $\|\varphi-\varphi_n\|_\infty\leqslant\frac{1}{n}$.

3) Montrer que φ est continue sur $\mathbf{R}^{+*}$.

►Correction.

1) Soit $x \in \mathbf{R}^{+*}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, alors on a $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} \leqslant 0$ après calculs. La décroissance découle alors.

Comment l'exploiter ? La suite en question est bien sûr minorée par zéro, donc par convergence monotone elle converge. Or $\dfrac{1}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, donc il existe $\varphi(x) \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} \varphi(x)$.

2) La convergence est monotone. Donc pour tout $x \in \mathbf{R}^{+*}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on a $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_n(x) + \dfrac{1}{n}$, la première partie de l'inégalité provient du fait que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\varphi_n(x) \geqslant 0$ et donc cette suite est de limite positive elle aussi. Donc on obtient $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$. Le majorant étant uniforme en x, on peut prendre la borne supérieure et obtenir le résultat.

3) La fonction φ_n est continue pour tout $n \in \mathbf{N}^{+*}$, en tant que somme de fonctions continues. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^{+*}$,
$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| + |\varphi_n(y) - \varphi(y)| \leqslant \dfrac{2}{n} + |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|$.
On distingue dans cette décomposition deux types de termes : le premier et le troisième se majorent avec la question **2)**. Celui du milieu se majore avec la continuité de φ_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbf{R}^{+*}$. Montrons que φ est continue en x.
Il existe un $\eta_n > 0$ tel que pour tout y satisfaisant $|x - y| < \eta_n$, on ait $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Choisissons N assez grand pour que $\dfrac{2}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, alors on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ pour tout y tel que $|x - y| < \eta_N$.

Exercice 78 (Fonctions continues injectives)
On souhaite démontrer que toute fonction continue injective $f : I \to \mathbf{R}$, avec I un intervalle réel, est strictement monotone.

1) Écrire l'hypothèse absurde avec des quantificateurs.

2) Soit $(x_1, x_2) \in I^2$. On note $\varphi^{x_1,x_2}_{y_1,y_2}$ la fonction $\varphi^{x_1,x_2}_{y_1,y_2} : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2) \end{cases}$.
Montrer que $\varphi^{x_1,x_2}_{y_1,y_2}$ s'annule pour x_1 et x_2 bien choisis.

3) Conclure.

►Correction.

1) Supposons que f n'est pas monotone strictement. Alors il existe deux couples $(x_1, y_1) \in I^2$ et $(x_2, y_2) \in I^2$ tels que f change de monotonie sur ces deux couples. Par exemple :

$$x_1 < y_1, \quad f(x_1) \geqslant f(y_1), \quad \text{et} \quad x_2 < y_2, \quad f(x_2) \leqslant f(y_2).$$

D'un point de vue logique notons C l'assertion logique « f est strictement croissante »et D l'assertion logique « f est strictement décroissante ». Alors l'assertion « f n'est pas strictement monotone »est $\rceil (C \cup D) = \rceil C \cap \rceil D$.

2) Choisissons de manière naturelle les x_1, x_2, y_1, y_2 de **1)**. Appliquons à $\varphi^{x_1,x_2}_{y_1,y_2}$ le théorème des valeurs intermédiaires. On a $\varphi^{x_1,x_2}_{y_1,y_2}(1) = f(x_2) - f(y_2) \leqslant 0$ et $\varphi^{x_1,x_2}_{y_1,y_2}(0) = f(x_1) - f(y_1) \geqslant 0$. Comme φ^{x_1,x_2} est continue en tant que composée de fonctions continues, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi^{x_1,x_2}_{y_1,y_2}(t_0) = 0$.

3) Ce qui signifie que l'on a l'égalité suivante : $f((1-t_0)x_1 + t_0x_2) = f((1-t_0)y_1 + t_0y_2)$. Comme f est injective, on récupère $(1-t_0)x_1 + t_0x_2 = (1-t_0)y_1 + t_0y_2$. Cette égalité est clairement absurde puisque $x_1 < y_1$ et $x_2 < y_2$.

Exercice 79
Soient $p \in \mathcal{P}$, $(n_1, \ldots, n_p) \in (\mathbf{N}^\star)^p$, d leur plus grand diviseur commun, et z une racine de $X^{n_1} + \ldots + X^{n_p} - p$.

1) Montrer que $|z| \geq 1$.

2) Soit $Q = \dfrac{X^{n_1} + \ldots + X^{n_p} - p}{X^d - 1}$. Montrer que Q est une somme de monômes du type $(X^d)^j$ avec j entier strictement positif.

►Correction.

1) Par l'absurde : si on avait $|z| < 1$ alors par inégalité triangulaire on aurait $p \leq |z|^{n_1} + \ldots + |z|^{n_p} < p$ ce qui est absurde !

2) On écrit pour tout i entre 1 et p, $n_i = q_i d$ avec q_i entier puis

$$X^{n_i} - 1 = (X^d)^{q_i} - 1 = (X^d - 1)((X^d)^{q_i - 1} + \ldots + 1).$$

Ainsi

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \frac{X^{n_i} - 1}{X^d - 1} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{q_i - 1} (X^d)^j.$$

Exercice 80
Soient $\mathbf{K}$ un corps et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n$ des scalaires deux à deux distincts avec $n \geqslant 2$.

1) Simplifier $P = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

2) On pose $A(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}$.

►Correction.

1) On commence par constater que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $P(a_k) = 1$. Or $\deg P \leqslant n-1$ donc $P = 1$.

2) Ensuite, après calculs, on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $A'(a_i) = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$ donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$. Cette quantité est donc le coefficient de degré $n-1$ du polynôme P, *i.e.* 0.

Si l'on connait quelques résultats sur les polynômes interpolateurs, on peut invoquer notamment l'unicité du polynôme interpolant la famille des $(a_i, 1)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On a ici redémontré que l'unique polynôme interpolant cette famille est le polynôme constant égal à 1.

Exercice 81

1) Soit $(P, a, b) \in \mathbf{C}[X] \times \mathbf{C}^2$. Quel est le reste de la division Euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$? Traiter le cas $a \neq b$ puis $a = b$.

2) En déduire le reste de la division Euclidienne de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

►Correction.

1) Le théorème de division Euclidienne nous donne l'existence de l'identité suivante avec $R = \alpha X + \beta$ de degré au plus 1 :

$$P = (X-a)(X-b) + R.$$

Mais $R(a) = P(a) = \alpha a + \beta$, $R(b) = P(b) = \alpha b + \beta$. Donc

$$R = \frac{P(a) - P(b)}{a - b} X + \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}.$$

Le même raisonnement pour $a = b$ montre, en dérivant l'identité du dessus, qu'on a :

$$P(a) = R(a) = \alpha a + \beta, \quad P'(a) = R'(a) = \alpha.$$

Donc

$$R = P'(a)X + (P(a) - aP'(a)).$$

2) En application, on a donc que

$$R = \frac{P(j) - P(j^2)}{j - j^2} X + \frac{jP(j^2) - j^2 P(j)}{j - j^2} = -i \frac{P(j) - P(j^2)}{\sqrt{3}} X - i \frac{jP(j^2) - j^2 P(j)}{\sqrt{3}}.$$

Puisque $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$. Mais comme P est à coefficients réels, on a

$$\overline{P(j)} = P(\bar{j}).$$

Donc

$$R = -i \frac{jP(j^2) - j^2 P(j)}{\sqrt{3}}.$$

En utilisant l'identité $1 + j + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 0$,

$$P(j) = -2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}(2n+1)\right) = P(j^2).$$

Donc

$$R = -iP(j) \frac{j - \bar{j}}{\sqrt{3}} = -iP(j) \frac{2i \operatorname{Im}(j)}{\sqrt{3}} = P(j) = -2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}(2n+1)\right).$$

Exercice 82

Résoudre l'équation polynomiale $P'^2 = 4P$ dans $\mathbf{R}[X]$.

►Correction.
Notons $d = \deg P$. Le passage au degré dans l'équation donne $d = 2$. Notons alors $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Alors $P' = 2aX + b$ on obtient
$(2aX + b)^2 = 4(aX^2 + bX + c)$. Une identification des coefficients donne alors $4a^2 = 4a$, $4ba = 4b$ et $b^2 = 4c$.
On obtient comme solutions $a = b = c = 0$ et $a = 1$ ainsi que tous les couples (b, c) vérifiant $b^2 = 4c$. Les polynômes associés à ces triplets sont les solutions.

Exercice 83

Calculer le reste dans la division Euclidienne de $(\cos\alpha + X \sin\alpha)^n$ avec $\alpha \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$ par $X^2 + 1$.

►Correction.
Ils existe un couple $(Q,R) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que
$$(\cos\alpha + X\sin\alpha)^n = (X^2+1)Q + R,$$
avec R de degré 1. Il s'écrit *a priori* sous la forme $R = a_n + b_n X$. L'évaluation en $X = i$ et $X = -i$ donne
$$e^{in\alpha} = ia_n + b_n, \quad e^{-in\alpha} = -ia_n + b_n.$$
On trouve $b_n = \cos(n\alpha)$ et $a_n = \sin(n\alpha)$.

Exercice 84

Soient $P \in \mathbf{C}[X]$ et $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

►Correction.
Le résultat est clair pour $n = 0$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $(Q_n, R_n) \in \mathbf{C}[X]^2$ tel que $P(X^n) = Q_n(X)(X^n-1) + R_n(X)$ avec $R_n \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$.
Or, $P(1) = 0$ puisque $X - 1 \mid P(X^n)$. Notons $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ les racines n-ième de l'unité. En injectant dans l'identité de division Euclidienne, on obtient :
$P(1) = 0 + R_n(\omega_k) = 0$ pour tout entier $k \in \{0, ..., n-1\}$. Bref, le polynôme R_n possède donc n racines, or il est de degré inférieur à $n-1$ donc il est nul. Le résultat s'en suit.
On peut aussi dire, d'après le lemme de Gauss, que $X^n - 1 \mid P(X^n)$ si et seulement si les racines de l'unité sont toutes racines de $P(X^n)$. Ce qui est bien le cas puisque $P(1) = 0$ par hypothèse.

Exercice 85

Soit $f \in C^n([a,b], \mathbf{R})$ avec $a < b$ et $n \geqslant 2$. On suppose que f s'annule en au moins n points distincts notés $a_1 < ... < a_n$.

1) Soit $x \in [a,b]$ distinct de $a_1, ..., a_n$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(x) = (x-a_1)...(x-a_n)\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$.
Analyser le cas $x = a_i$ pour un certain i. Que devient cette formule si f est la fonction polynomiale d'un élément de $\mathbf{K}[X]$? ♣ Indication – On pourra introduire $A_x := \dfrac{f(x)}{(x-a_1)...(x-a_n)}$ et la fonction $\varphi : t \longmapsto f(t) - A_x(t-a_1)...(t-a_n)$.

2) En déduire une majoration sur $|f|$.

►Correction.

1) Si x est l'un des a_i, l'égalité est triviale.
Sinon, appliquons n fois le théorème de Rolle à la fonction φ. Pour la première étape, elle est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, la deuxième partie de la fonction φ étant polynomiale. Et de plus $\varphi(x) = 0 = \varphi(a_1) = ... = \varphi(a_n)$, φ' s'annule donc en n points d'après le théorème de Rolle. Ces points sont de plus distincts des précédents.
Ensuite on recommence, en utilisant le caractère C^n de f, les hypothèses de Rolle seront à chaque itération vérifiées. La fonction φ'' s'annule donc en $n-1$ points, etc ... et $\varphi^{(n)}$ s'annulera en un point noté c. Comme $\varphi^{(n)} = f^{(n)} - A_x \times n!$, le nombre c vérifie donc l'égalité cherchée.

2) La fonction $f^{(n)}$ est continue sur $[a,b]$, elle est donc bornée. On en déduit l'estimée
$$\left|f(x)\right| = \left|(x-a_1)...(x-a_n)\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\right| \leqslant \left|(x-a_1)...(x-a_n)\right| \frac{M}{n!} \leqslant \frac{M(b-a)^n}{n!},$$
avec $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f(x)\right|$.

Exercice 86 (Application — Erreur uniforme d'interpolation de Lagrange)

Soient toujours $f \in C^n([a,b], \mathbf{R})$ avec $a < b$, $n \geqslant 2$ et une famille $a_1 < .... < a_n$ de n points distincts.

1) Donner l'expression de L_n le *polynôme interpolateur de la famille* $(a_i, f(a_i))_{i=1,...,n}$ *i.e.* l'unique polynôme de degré $n-1$ vérifiant $L_n(a_i) = f(a_i)$.

2) Donner une estimée simple sur $\|f - L_n\|_\infty := \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f(x) - L_n(x)\right|$. Qu'en déduit-on lorsque le nombre de points n augmente ?

►Correction.

1) Le polynôme L_n est défini par
$$L_n(X) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \frac{\prod\limits_{j\neq i}(X - a_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i - a_j)}.$$
On vérifie que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\quad L_n(a_i) = f(a_i)$.

2) La fonction $f - L_n$ s'annule donc en $a_1 < ... < a_n$. Elle est de plus de classe C^n sur $[a,b]$. Donc d'après l'exercice précédent, il existe une constante $M \in \mathbf{R}^+$ telle que pour tout $x \in [a,b]$,
$$\left|f(x) - L_n(x)\right| \leqslant M\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Donc par passage à la borne supérieure, le majorant étant uniforme en x :

$$\|f - L_n\|_\infty \leqslant \frac{M(b-a)^n}{n!}.$$

Si $|b-a| \leqslant 1$, alors $\|f - L_n\|_\infty \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Lorsque l'on augmente le nombre de points d'interpolation, on approche de plus en plus la vraie fonction f.

La condition $|b-a| \leqslant 1$ n'est pas fondamentale. Si elle n'est pas remplie, on subdivise l'intervalle de départ en plus petits, et on interpole sur chacun des sous-intervalles. On parle alors d'interpolation composée.

Exercice 87

Soit $\mathbf{K}$ un corps et $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme scindé.

1) Montrer que P' est scindé également.

2) Que se passe-t-il si l'on ajoute « à racines simples »dans l'assertion de départ ?

►Correction.

1) Notons $a_1, ..., a_r$ les racines de P et $m_1, ..., m_r$ leurs multiplicités. Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, $m_i \geqslant 1$.
Appliquons le théorème de Rolle sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$. Le polynôme P est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$, et vérifie $P(a_i) = P(a_{i+1})$. On a donc d'après le théorème de Rolle au moins $r-1$ racines.
Par ailleurs, les a_i sont des racines de multiplicité $m_i - 1$ de P'. Donc au final nous avons exhibé des racines de P' de multiplicité totale au moins égale à
$\sum_{i=1}^{r}(m_i - 1) + (r-1) = \sum_{i=1}^{r} m_i - 1 = \deg P - 1$. Le polynôme P' est donc scindé.

2) Si l'on rajoute le caractère scindé à racines simples, c'est plus simple. En effet on applique Rolle aux $\deg P$ racines distinctes $a_1, ..., a_{\deg P}$. Le théorème de Rolle nous fournit au moins $\deg P - 1$ racines distinctes, comme $\deg P' = \deg P - 1$, elles sont toutes simples. Donc
P « scindé à racines simples » implique P' « scindé à racines simples ».

Exercice 88

Soit $k \geqslant 0$. On note $f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Pour quelle valeur maximale de k, la fonction f est-elle dans $\mathcal{C}^k(\mathbf{R}, \mathbf{R})$?

►Correction.

Commençons par montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction f est continue en 0 par croissances comparées, elle est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et,
$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \ln(x) + x^2 & \text{si } x > 0 \\ 3x^2 \ln(-x) - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Donc $f'(x) \longrightarrow_{x\to 0} 0$, toujours par croissances comparées. Finalement le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ nous livre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \ln(x) + x^2 & \text{si } x > 0 \\ 3x^2 \ln(-x) - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Continuons : le point important est la possibilité d'appliquer ou non les croissances comparées. On pourra le faire encore pour la dérivée seconde, la fonction f est $\mathcal{C}^2$ et $f''(x) = \begin{cases} 6x \ln(x) + 5x & \text{si } x > 0 \\ 6x \ln(-x) - 5x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Clairement le théorème ne s'applique pas pour la dérivée troisième. On obtient une limite infinie en zero, et la fonction n'est donc même pas dérivable trois fois en zero. *A fortiori* pas de classe $\mathcal{C}^3$!
Conclusion : l'indice k maximal est donc $k = 2$.

Exercice 89

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $\lim_{\infty} f = \infty$ et $\lim_{-\infty} f = \infty$.

Montrer que f' s'annule au moins une fois.

►Correction.

Avec un petit dessin, on se convainc assez rapidement que la définition de la limite va nous permettre d'appliquer le théorème de Rolle.
Plus précisément, appliquons la définition de la limite pour « $A = f(0) + 1$ »(au point zero, par exemple !). Alors il existe $c, d \in \mathbf{R}$ tels que $c < d$ et $\forall x > d, y < c, \quad f(x) > f(0) + 1$ et $f(y) > f(0) + 1$.
Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires. La fonction f est continue car dérivable, et par ailleurs on a $f(d) > f(0) + 1$, $f(0) < f(0) + 1$ d'une part, $f(c) > f(0) + 1$, $f(0) < f(0) + 1$ d'autre part. Ainsi il existe δ et γ tels que $f(\alpha) = f(\gamma)$ avec $(\alpha, \gamma) \in]c, 0[\times]0, d[$.
Le théorème de Rolle permet finalement de conclure quant à l'existence d'un point d'annulation de la dérivée.

Exercice 90

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$. On suppose que $f'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ pour laquelle : $\quad \forall x \in \mathbf{R}^+, \quad f(x) = g\left(x^2\right)$.

►Correction.
Comme : $\forall x \in \mathbf{R}^+, \quad f(x) = g(x^2) \quad \Longleftrightarrow \quad f(\sqrt{x}) = g(x)$, définissons alors la fonction g sur $\mathbf{R}^+$ par $g(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$. Par définition, la fonction g vérifie bien l'égalité demandée, regardons si elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$.
Comme f est dérivable, que la fonction racine est dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$, g est *a priori* au moins dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$. Et pour tout $x \in \mathbf{R}^{+*}$, on a
$g'(x) = \dfrac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \dfrac{f'(\sqrt{x}) - f'(0)}{2(\sqrt{x} - \sqrt{0})} \longrightarrow_{x\to 0, x>0} \dfrac{1}{2} f''(0)$.
Moralité de l'histoire, comme de plus g est continue en zero, en tant que composée de fonctions continues, que g est dérivable en dehors de zero, et que sa dérivée sur $\mathbf{R}^{+*}$ admet une limite finie en zero égale à $\dfrac{f''(0)}{2} < \infty$, le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$ nous dit que g est bien dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ et $g'(0) = \dfrac{f''(0)}{2}$.

Exercice 91
Les espaces suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier.

$$A = \left\{P \in \mathbf{R}[X] \quad : \quad \deg P \geqslant 2\right\}, \quad B = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad : \quad z = 0\right\}.$$

►Correction.
L'ensemble A n'est clairement pas stable par différence : $X^2 - X^2 = 0$ n'est pas de degré 2. L'ensemble B est quant à lui un espace vectoriel.
C'est plus précisément un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Il contient le vecteur nul $(0, 0, 0)$, et est stable par combinaison linéaire. Si $(x, y, 0)$ et $(x', y', 0)$ appartiennent à B avec $(x, x', y, y') \in \mathbf{R}^4$, on a pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda(x, y, 0) + \mu(x', y', 0) = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', 0) \in B$.

Exercice 92
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $a < b$ continue et strictement positive, dérivable sur $]a, b[$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\quad \dfrac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

2) Peut-on remplacer l'hypothèse « positive sur $[a, b]$ »par « ne s'annule pas sur $[a, b]$ » ?

►Correction.

1) On peut constater que $\dfrac{f'(c)}{f(c)}$ est une dérivée logarithmique. Définissons donc tout d'abord une nouvelle fonction g, par $g(x) = \ln f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Elle est bien définie puisque f est strictement positive.
Par ailleurs la fonction g est continue sur $[a, b]$ en tant que composée de fonctions continues, et dérivable sur $]a, b[$ pour la même raison. On peut lui appliquer l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\ln\left(\dfrac{f(b)}{f(a)}\right) = g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) = \dfrac{f'(c)}{f(c)}(b - a)$. Passant à l'exponentielle le résultat suit.

2) Si f ne s'annule pas, elle garde un signe constant sur $[a, b]$. Sinon, d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule.
Définissons alors $g(x) = \ln|f(x)|$ pour $x \in [a, b]$. Elle vérifie toujours la même formule de dérivation $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. On peut encore appliquer l'égalité des accroissements finis pour obtenir $\quad \ln\left|\dfrac{f(b)}{f(a)}\right| = \dfrac{f'(c)}{f(c)}(b - a)$. La première valeur absolue disparait puisque $f(b)$ et $f(a)$ sont de même signe.
Le résultat reste donc valable.

Exercice 93
Déterminer une base de

$$A = \left\{P \in \mathbf{R}_3[X] \quad : \quad P(X^2) = (X^3 + 1)P\right\}, \quad B = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \quad : \quad x + y = 0, 2x - z + t = 0\right\}.$$

►Correction.
Pour parler de base, on vérifie déjà que A et B sont respectivement des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_3[X]$ et $\mathbf{R}^4$. En effet, le polynôme nul est dans A, le quadruplet nul est dans B. On vérifie facilement la stabilité par combinaison linéaire.
Ensuite cherchons une base. On commence par déterminer l'ensemble A. Prenant un polynôme P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on obtient $P \in A \Longleftrightarrow c = 0, b = c, a + d = 0, c = b, b = 0, a = a$ *i.e.* $a + d = 0$ et $b = c = 0$. Finalement P est du type $aX^3 - a$. Une famille génératrice de A est donc $X^3 - 1$. Elle est bien sûr libre aussi car réduite à un seul vecteur non nul.
Passons à B. Si $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, alors $(x, y, z, t) \in B$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}$ tels que $x = \lambda, y = -\lambda, z = \mu, t = \mu - 2\lambda + \mu = 2(\mu - \lambda)$.
Vectoriellement cela donne : $(x, y, z, t) = \lambda(1, -1, 0, -2) + \mu(0, 0, 1, -2)$.

Exercice 94
1) Soient $\eta > 0$ et $\varphi :]-\eta, \eta[\longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $\varphi(x) \longrightarrow_{x \to 0} 0$.

Montrer que $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \varphi\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on en déduire ?

2) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable en zéro. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

►Correction.

1) Fixons $\varepsilon > 0$. Alors par l'inégalité triangulaire, on a $\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\varphi\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\left|\varphi\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|$. Comme $\varphi(x) \longrightarrow_{x\to 0} 0$, il existe un $\eta_0 > 0$ tel que $|x| < \eta_0 \implies |\varphi(x)| < \varepsilon$. Prenant N satisfaisant $\frac{1}{\mathrm{N}} < \eta$, on a pour tout entier $k \in \{0, ..., n\}$, $\left|\frac{k}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n} < \eta$ dès que $n \geqslant \mathrm{N}$. Donc finalement, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, on a
$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\varphi\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\left|\varphi\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \leqslant \varepsilon$. Cette assertion nous livre par définition : $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\varphi\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers zéro.

2) Écrivons la définition de la dérivabilité en zéro de f. Il existe une fonction $\varphi : [-\eta, \eta] \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $\eta > 0$ telle que $\varphi(x) \longrightarrow_{x\to 0} 0$, et

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varphi(x).$$

Donc pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a
$u_n = \sum_{k=0}^{n}\left(f(0) + \frac{k}{n^2}f'(0) + \frac{k}{n^2}\varphi\left(\frac{k}{n^2}\right)\right) = f(0)n + \frac{f'(0)}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\varphi\left(\frac{k}{n^2}\right)$. On reconnait le dernier terme, qui en application de la question **1)** converge vers zéro.
Si $f(0) = 0$ alors $u_n \longrightarrow_{n\to 0} \frac{f'(0)}{2}$.
Si $f(0) > 0$ alors $u_n \longrightarrow_{n\to 0} \infty$.
Si $f(0) < 0$ alors $u_n \longrightarrow_{n\to 0} -\infty$.

Exercice 95

Montrer que le sous-ensemble constitué des suites réelles périodiques possède une structure d'espace vectoriel que l'on précisera.

►Correction.
Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux éléments de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ supposées périodiques de périodes (optimale) N_1 et N_2 respectivement. On va démontrer plus précisément que $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}_{\mathrm{N}}$, l'ensemble des suites réelles périodiques, est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
En effet, la suite nulle est périodique.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lambda u_{n+\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2} + v_{n+\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2} = \lambda u_n + v_n$, la suite $\lambda u + v$ est donc périodique elle aussi. La période optimale que l'on peut former à partie de N_1 et N_2 est $\mathrm{PPCM}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$.

Exercice 96

1) Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbf{R}) \cap \mathcal{D}^3(]a,b[, \mathbf{R})$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\quad f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c)$.

2) En déduire que $\quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \quad 0 \leqslant \arctan(x) - \frac{x}{2}\left(\frac{2+x^2}{1+x^2}\right) \leqslant \frac{x^3}{6}$.

►Correction.

1) Comme pour l'égalité de Taylor-Lagrange non décentrée, on considère une fonction auxiliaire à laquelle on applique le théorème de Rolle.
Ici, posons pour tout $t \in [a,b]$, $\Phi^a(t) = f(t) - f(a) - \frac{t-a}{2}(f'(a) + f'(t)) + \frac{(t-a)^3}{12}\mathrm{K}$, où $\mathrm{K} \in \mathbf{R}$ pour le moment est une constante quelconque.
On a $\Phi^a(a) = 0$ pour toute constante $\mathrm{K} \in \mathbf{R}$. Ensuite on choisit K de sorte que $\Phi^a(b) = 0$: $\quad \mathrm{K} = \frac{12}{(b-a)^3}\left(f(a) - f(b) - \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b))\right)$.
La fonction Φ^a vérifie les hypothèses de Rolle, puisque notamment $f' \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbf{R}) \cap \mathcal{D}^2(]a,b[, \mathbf{R})$. D'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]a,b[$, tel que $(\Phi^a)'(d) = 0$. Après calcul, on constate que $(\Phi^a)'$ s'annule en d et en a. On réapplique le théorème de Rolle (f'' vérifie les hypothèses de Rolle)), qui fournit l'existence de $c \in]a,d[\subset]a,b[$, tel que
$(\Phi^a)'''(c) = 0 = \frac{c-a}{2}(\mathrm{K} - f'''(c))$. Donc $\mathrm{K} = f'''(c)$ et la formule de la première question.

2) On applique la question **1)** pour $f = \arctan$, $b = x$ et $a = 0$. On constate notamment que $\arctan''' \leqslant 0$.

Exercice 97 (Algèbre linéaire vs arithmétique)

Une famille de cardinal quelconque sera dite *libre* si toute sous-famille finie est libre.

1) Justifier que $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.

2) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $(\ln p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille $\mathbf{Q}$-libre de $\mathbf{R}$.

3) En déduire que $\ln p \in \mathbf{Q}$ pour au plus un nombre premier p.

►Correction.

1) $(\mathbf{R}, +, .)$ peut être vu comme un $\mathbf{R}$ espace vectoriel en considérant comme lois l'addition habituelle $+$ de $\mathbf{R}$, et . le produit de deux réels. En restreignant la loi externe . à $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ on définit ainsi une structure de $\mathbf{Q}$-espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

2) Rappelons que $\mathcal{P}$ est un ensemble infini. Soit une combinaison linéaire finie d'éléments de $(\ln p)_{p\in\mathcal{P}}$:

$$\lambda_1 \ln p_1 + \ldots + \lambda_r \ln p_r = 0$$

avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbf{Q}^r$ et $(p_1, \ldots, p_r) \in (\mathcal{P})^r$. En prenant l'exponentielle de chaque côté, on obtient

$$p_1^{\lambda_1} \ldots p_r^{\lambda_r} = 1.$$

Si $\lambda_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ avec $(a_i, b_i) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, en élevant à la puissance $b_1 \times \ldots \times b_r$ on obtient

$$\prod_{i=1}^{r} p_i^{(b_1 \ldots b_{i-1}) a_i (b_{i+1} \ldots b_r)} = 1.$$

Un produit d'entiers supérieurs à un devrait donc être égal à un, donc pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$,

$$p_i^{(b_1 \ldots b_{i-1}) a_i (b_{i+1} \ldots b_r)} = 1.$$

En prenant le logarithme et en utilisant que les b_i sont non nuls, on obtient $a_i = 0$ pour tout i et la liberté en découle.

3) Supposons qu'il existe p_1, p_2 deux nombres premiers tels que $\ln p_1 \in \mathbf{Q}$ et $\ln p_2 \in \mathbf{Q}$. Alors $\ln p_2 \neq 0$ et $\dfrac{\ln p_1}{\ln p_2} \in \mathbf{Q}$. La famille $(\ln p_1, \ln p_2)$ serait donc liée sur $\mathbf{Q}$ — absurde.

Exercice 98

Soit $\mathrm{F} = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad : \quad f(0) + f(1) = 0 \right\}$.

1) Montrer que F est un espace vectoriel.

2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

►Correction.

1) On montre facilement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. En effet : $0 + 0 = 0$ donc la fonction nulle est dans F. Si $(f, g) \in \mathrm{F}^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, alors $(\lambda f + \mu g)(0) + (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$.
L'ensemble F est donc bien un sous-espace vectoriel de F, *a fortiori* un espace-vectoriel.

2) Montrons qu'un supplémentaire est constitué de l'ensemble E des fonctions constantes.
En effet si $2\mathrm{C} = 0$ alors $\mathrm{C} = 0$. Donc $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \{0\}$.
Si $g \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, alors cherchons une fonction $f \in \mathrm{F}$ et une constante $\mathrm{C} \in \mathbf{R}$ telle que $f = g + \mathrm{C}$. Alors $f(1) = g(1) + \mathrm{C}$, $f(0) = g(0) + \mathrm{C}$ donc en sommant on pose nécessairement $\mathrm{C} = \dfrac{f(1) + f(0)}{2}$. On définit alors $g = f - \dfrac{f(1) + f(0)}{2}$. On vérifie très facilement que $g(1) + g(0) = 0$.

Exercice 99

Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{F}', \mathrm{G}'$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \mathrm{F}' \cap \mathrm{G}'$.
Montrer que $(\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')) \cap (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}')) = \mathrm{F}$.

►Correction.
Comme $\mathrm{G} \cap \mathrm{F}'$ et $\mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$ sont des espaces vectoriels en tant qu'intersection d'espaces vectoriels, on a $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{G} \cap \mathrm{F}'$, $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$.
Soit $f \in \mathrm{F}$. Alors $f = f + 0_{\mathrm{E}}$ donc $f \in \mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')$ et $f \in \mathrm{F} + \mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$, d'où l'inclusion $\mathrm{F} \subset (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')) \cap (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}'))$.
Inversement soit $g \in (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')) \cap (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}'))$. Alors choisissons $f_1, f_2 \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G} \cap \mathrm{F}'$, $g' \in \mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$ tels que $f = f_1 + g = f_2 + g'$. Donc $f_1 - f_2 = g' - g$, on a $f_1 - f_2 \in \mathrm{F}$ et $g' - g \in \mathrm{G}$ car $\mathrm{G} \cap \mathrm{F}' \subset \mathrm{G}$ et $\mathrm{G} \cap \mathrm{G}' \subset \mathrm{G}$. Bref, $f_1 - f_2 = g' - g \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \mathrm{F}' \cap \mathrm{G}'$ par hypothèse.
La fin de l'inclusion repose entièrement sur le fait suivant : arriver à montrer que g (ou g') sont des éléments de F.
On avance en écrivant $g = (g - g') + g'$. D'après ce que l'on vient de faire, $g - g' \in \mathrm{F}' \cap \mathrm{G}' \subset \mathrm{G}'$ et $g' \in \mathrm{G} \cap \mathrm{G}' \subset \mathrm{G}'$ donc finalement $g \in \mathrm{G}' \cap (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}') = \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \subset \mathrm{F}$.
C'est ce qu'on voulait.

Exercice 100

Soient $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^2 + 1$, $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1$ et $\mathrm{P}_3 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}$.
Montrer que la famille $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ est une base de $\mathbf{R}_2[\mathrm{X}]$.

►Correction.
Soit $\mathrm{P} = \alpha \mathrm{X}^2 + \beta \mathrm{X} + \gamma \in \mathbf{R}_2[\mathrm{X}]$. On cherche $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\lambda \mathrm{P}_1 + \mu \mathrm{P}_2 + \nu \mathrm{P}_3$. En identifiant on obtient :
$\begin{cases} \lambda & +\mu & +\nu & = \alpha \\ & \mu & +\nu & = \beta \\ \lambda & -\mu & & = \gamma \end{cases}$. En résolvant on trouve une unique solution $(\lambda, \mu, \nu) = (\alpha - \beta, \alpha - \beta - \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma)$. Les caractères libre et générateur sont justifiés.

Exercice 101

Soient I un intervalle, $a \in \mathrm{I}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ pour un certain $n \geqslant 0$.

1) Montrer qu'il existe $c \in \mathrm{I}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

♣ Indication – On pourra considérer la fonction auxiliaire $\Phi^x(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{\mathrm{K}}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$, pour $\mathrm{K} \in \mathbf{R}$, $x \in \mathrm{I}$.

2) En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

►Correction.

1) La fonction Φ^x vérifie bien les hypothèses de Rolle puisque $f^{(n)} \in C^1(\mathrm{I}, \mathbf{R})$. Par ailleurs $\Phi^x(x) = 0$. Choisissons K de sorte que $\Phi^x(a) = 0$, c'est-à-dire $\frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-t)^k\right) = \mathrm{K}$. Ce choix de K est possible si $x \neq a$, le cas $x = a$ étant trivial on supposera $x \neq a$ dans la suite.
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \mathrm{I}$ tel que $(\Phi^x)'(c) = 0 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(x-c)^{k-1} + \frac{\mathrm{K}}{n!}(x-c)^n$. La somme est téléscopique : $0 = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{\mathrm{K}}{n!}(x-c)^n$, d'où $\mathrm{K} = f^{(n+1)}(c)$.

2) On obtient pour $f = \exp$, $a = 0$ et $\mathrm{I} = \mathbf{R}$, l'existence de $c \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$.
Le dernier terme tendant vers zero, le résultat est démontré.

Exercice 102

On définit quatre fonctions $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}$ par :
$\forall x \in [0, 2\pi], \quad f_1(x) = \cos x, f_2(x) = x\cos x, f_3(x) = \sin x, f_4(x) = x\sin x$.
Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre dans $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbf{R})$.

►Correction.
Prenons une combinaison linéaire nulle : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^4$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$ dans $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbf{R})$. Cette égalité signifie que $\forall x \in [0, 2\pi], \quad \lambda_1 \cos x + \lambda_2 x\cos x + \lambda_3 \sin x + \lambda_4 x \sin x = 0$. En prenant $x = 0$, $x = \pi$, on obtient $\lambda_1 = 0$ et $-\lambda_1 - \lambda_2\pi = 0$ d'où $\lambda_2 = 0$.
Dérivons l'identité restante : pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\lambda_3 \cos x + \lambda_4 \sin x + \lambda_4 \cos x = 0$. On évalue ensuite en $x = \frac{\pi}{2}$: $\lambda_4 = 0$ puis $\lambda_3 = 0$.
La famille est bien libre.

Exercice 103

Calculer les développements limités suivants au voisinage de zéro :
$x \longmapsto \sqrt{1 + \sin x}$ à l'ordre 3, $\quad x \longmapsto \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+x^2} - e^{\cos x}$ à l'ordre 5.

►Correction.
On a $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ et d'autre part $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o\left(u^3\right)$. Comme $\sin x \longrightarrow_{x\to 0} 0$, on peut composer les développements pour obtenir
$\sqrt{1+\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right)$.
Le cosinus étant positif au voisinage de zéro, la seconde question a bien un sens et la racine cubique a pour définition associée la forme exponentielle. Calculons :
$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)$, $\quad \frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^5\right)$, $\quad$ Donc après calculs : $\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+x^2} - e^{\cos x} \underset{x\to 0}{=} -\frac{172}{100} + \frac{39}{100}x^2 + \frac{1679}{400}x^4 + o\left(x^5\right)$

Exercice 104

Soient E et **K**-espace vectoriel et $u_1, ..., u_n \in \mathrm{E}$. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, on pose : $\quad v_k = u_1 + \ldots + u_k$.

1) Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre.

2) Montrer que la famille $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{E}$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{E}$.

►Correction.

1) Supposons que $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et soit $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0$. Alors on obtient $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{l=1}^{k} u_l = 0$, en utilisant la liberté de $(u_1, \ldots, u_n)$ on arrive au système suivant : $\begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_n & = & 0 \\ \lambda_2 + \ldots + \lambda_n & = & 0 \\ \ldots & = & \ldots \\ \lambda_n & = & 0 \end{cases}$. En partant de la dernière question et en remontant vers la première on obtient facilement $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Inversement si $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, soit $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$. On écrit $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - v_1$, ..., $u_n = v_n - v_{n-1}$. On obtient alors en remplaçant et en résolvant le système en $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la liberté de $(u_1, \dots, u_n)$.

2) Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors $x \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) \iff \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1} v_i = \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) v_i - \lambda_2 v_1$.

On vient de démontrer l'implication directe. L'implication réciproque est immédiate.

*La transformation effectuée dans la question **2)**, développement, changement de variable puis factorisation, s'appelle en général une transformation d'Abel.*

Exercice 105

Calculer les développements limités suivants au voisinage de zéro :

$x \longmapsto \ln(1 + \sin x) - \sin \ln(1 + x)$ à l'ordre 5, $x \longmapsto \dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ à l'ordre 3.

►Correction.

$\ln(1 + \sin x) - \sin \ln(1 + x) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)\right) - \sin\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)$. Comme $\sin(x) \longrightarrow_{x\to 0} 0$ et $\ln(1 + x) \longrightarrow_{x\to 0} 0$, on peut composer les développements limités, on obtient alors après simplifications :

$$\ln(1 + \sin x) - \sin \ln(1 + x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{8} + o\left(x^5\right).$$

On sait que $x - \sin x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)$ et $1 - \cos x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$. Donc :

$\dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x} = \dfrac{2}{x^2} \dfrac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)}$. Après la factorisation de x^2 on peut cette fois utiliser le développement limité de $\dfrac{1}{1-u}$ lorsque $u \to 0$ pour l'inverser. Après calculs on obtient :

$\dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{45} x^3 + o\left(x^3\right)$.

Exercice 106

Soit $n \in \mathbf{N}$. On veut montrer que la famille $\left\{(\mathrm{X} + k)^n\right\}_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$. Soit donc $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbf{R}^{n+1}$ telle que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\mathrm{X} + k)^n = 0$.

1) Montrer que pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$

2) Conclure.

►Correction.

1) On souhaite en d'autres termes abaisser la puissance dans la somme. Pour cela dérivons $n - p$ fois le polynôme initial, on obtient alors $n \dots (n - (n - p) + 1) \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\mathrm{X} + k)^p = 0$ d'où la première question. En évaluant la fonction polynomiale associée en $x = 0$, on trouve $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$ pour tout entier $p \in \{0, \dots, n\}$.

2) Soit $\mathrm{P} = \sum_{p=0}^{n} b_p \mathrm{X}^p$ un élément de $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$. Alors d'après ce qui précède et par linéarité de la somme, on obtient

$\sum_{p=0}^{n} b_p \sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\sum_{p=0}^{n} b_p k^p\right)$, d'où finalement $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(k) = 0$ pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$.

Il nous reste à choisir, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, le polynôme $\mathrm{P}_k = \dfrac{\prod_{i\neq k} (\mathrm{X} - i)}{\prod_{i\neq k} (k - i)}$. On obtient alors $\lambda_k = 0$ en remplaçant. Faisant cela pour tout k, la liberté de la famille s'en suit.

Exercice 107

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{n\to\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$, $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

►Correction.

Pour tout $n \geqslant 1$, $\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)\right)$. En mettant en facteur $3\sqrt[n]{2}$, on obtient

$\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = 2 \times 3^n \times \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{3}{2}}\right)\right)$. Comme $\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \longrightarrow_{n\to\infty} 1$, on obtient $\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n \longrightarrow_{n\to\infty} 2$.

Pour tout x assez proche de zéro la fonction est bien définie par sa forme exponentielle, et on a
$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\cos x\right) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right)$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Exercice 108

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ distincts. On pose
$\mathrm{F} = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \quad : \quad \forall k \in \{1,...,n\}, \quad f(x_k) = 0\right\}$.

1) Montrer que F est un espace vectoriel.

2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

►Correction.

1) La première question est évidente en remarquant que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

2) Faisons une analyse-synthèse. Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, elle se décompose en $g = f + \widehat{f}$ avec $\widehat{f} \in \mathrm{S}$ où S vérifie $\mathrm{F} \oplus \mathrm{S} = \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
Alors nécessairement $g(x_k) = \widehat{f}(x_k)$. Prenant $\widehat{f}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g(x_k)\prod\limits_{l\neq k}(x-x_l) = \mathrm{L}_n(g)(x)$, on obtient un polynôme de $\mathbf{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.
Montrons alors que $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) = \mathrm{F} \oplus \mathbf{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. En effet, l'intersection est nulle puisqu'un polynôme de degré $\leqslant n-1$ a au plus $n-1$ racines.
Pour l'existence étant donnée $g \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, posons $g = (g - \mathrm{L}_n(g)) + \mathrm{L}_n(g)$. On constate facilement que $g - \mathrm{L}_n(g) \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{L}_n(g) \in \mathbf{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

Exercice 109

Montrer que deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ d'un espace vectoriel E de dimension finie et tels que $\dim \mathrm{F}_1 = \dim \mathrm{F}_2$ ont un supplémentaire commun.

►Correction.
Faisons une récurrence descendante sur $\dim \mathrm{F}_1 = \dim \mathrm{F}_2 = p$.
Si $p = \dim \mathrm{E}$, alors $\{0_\mathrm{E}\}$ est un supplémentaire commun F_1 et F_2.
Supposons que tout couple de sous-espaces vectoriels de E de même dimension p admettent un supplémentaire commun dans E.
Alors soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim \mathrm{F}_1 = \dim \mathrm{F}_2 = p-1$. Il s'agit ici de compléter F_1 et F_2 par une même droite D, et d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{D}$ et $\mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{D}$.
Si $\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2 \subsetneq \mathrm{E}$, alors on choisit $x \in \mathrm{E}\backslash \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$ et on pose $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}\{x\}$, on vérifie facilement $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{D} = \{0_\mathrm{E}\}$, $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D} = \{0_\mathrm{E}\}$.
Sinon $\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2 = \mathrm{E}$ donc soit $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}_2$ soit $\mathrm{F}_2 \subset \mathrm{F}_1$ mais comme ils ont même dimension $\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_2$ et n'importe quel supplémentaire convient.
Par application de l'hypothèse de récurrence il existe un supplémentaire commun F à $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{D}$ et $\mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{D}$. Alors $\mathrm{D} \oplus \mathrm{F}$ est un supplémentaire commun dans E à F_1 et F_2.

Exercice 110

1) Montrer que la fonction $f : x \in \mathbf{R}^{+\star} \longmapsto x + \ln x \in \mathbf{R}$ est bijective.

2) Calculer $\lim\limits_{y\to\infty} f^{-1}(y)$, puis montrer que : $f^{-1}(y) \sim_{y\to\infty} y$.

3) Montrer que : $f^{-1}(y) - y \sim_{y\to\infty} -\ln y$.

►Correction.

1) La fonction f est strictement croissante, continue et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. Elle est donc bijective sur les intervalles mentionnés.

2) On ne peut trouver d'expression explicite pour f^{-1}. Pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $f^{-1} \circ f(x) = x$. Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, on a par composition des limites $\lim\limits_{y\to\infty} f(y) = \infty$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, on a $\frac{f^{-1}(x+\ln x)}{x+\ln x} = \frac{x}{x+\ln x}$. Par composition des limites, $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{f^{-1}(y)}{y} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\ln x}{x}} = 1$. D'où l'équivalent cherché.

3) Soit $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, on a $\frac{f^{-1}(x+\ln x)-(x+\ln x)}{\ln x} = -1 + \frac{f^{-1}(x+\ln x)}{x+\ln x} \times \frac{x+\ln x}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \to_{x\to\infty} -1$.
Un nouvelle fois par composition des limites l'équivalent demandé s'en suit.

Exercice 111

Soit $\mathrm{E} = \mathbf{R}^{]-1,1[}$, et $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ la famille de fonctions définies pour tout $x \in]-1,1[$ par
$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Quel est le rang de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$?

►Correction.
On cherches des relations linéaires entre ces fonctions.
Premièrement, remarquons que pour tout $x \in]-1,1[$, $f_1(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) + f_4(x)$. De-même $f_2(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) - f_4(x)$.
Donc $\mathrm{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2\}$. S'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f_1 = \lambda f_2$ alors pour tout $x \in]-1,1[$, $\lambda(1+x) = 1-x$, d'où $\lambda = 0$ et la famille (f_1, f_2) n'est pas liée.
Donc $\mathrm{Rg}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = 2$.

Exercice 112

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, montrer que le polynôme $\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^{2n} - 2n\mathrm{X} + 1$ possède au moins une racine réelle. On notera x_n la plus grande de ces racines.

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

3) Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{=} 1 + \dfrac{\ln n}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

►Correction.

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathrm{P}_n(0) = 1$ et $\mathrm{P}_n(1) = 2(1-n) \leqslant 0$. Comme P_n est continue, on en déduit l'existence d'au moins une racine réelle.
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{P}'_n(x) = 2n\left(\mathrm{X}^{2n-1} - 1\right)$, P_n est donc décroissante sur $[0,1]$.

2) On a alors $\mathrm{P}_n(x_n) = 0 = x_n^{2n} - 2nx_n + 1$ et $\mathrm{P}_{n+1}(x_n) \leqslant \mathrm{P}_n(x_n) = 0$ notamment car $x_n \in [0,1]$. Comme P_n est décroissante sur $[0,1]$, on a $x_{n+1} \geqslant x_n$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. Elle est majorée par 1 donc converge.
Supposons que $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} l \in]0,1[$. Alors $x_n^{2n} \sim_{n\to\infty} l^{2n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Un passage à la limite dans $\mathrm{P}_n(x_n) = 0$ fournit une contradiction, comme dans le cas $l = 0$.
Finalement $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

3) L'essentiel du travail repose sur le second terme du développement, le premier étant donné par la limite précédente. En prenant le logarithme de chaque côté de $x_n^{2n} = 2nx_n - 1$, on obtient
$\ln x_n = \dfrac{\ln(2n)}{2n-1} + \dfrac{1}{2n-1}\ln\left(1 - \dfrac{1}{2nx_n}\right)$. D'où avec un développement du logarithme : $\ln x_n \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln(2n)}{2n-1} + \dfrac{1}{2n-1}\left(-\dfrac{1}{2nx_n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$. En prenant l'exponentielle :
$x_n \underset{n\to\infty}{=} 1 + \underbrace{\dfrac{\ln(2n)}{2n-1}}_{\sim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n}} - \underbrace{\dfrac{1}{2(2n-1)x_n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n(2n-1)}\right)}$. D'où le résultat.

Exercice 113

Étudier localement en zéro la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$.

►Correction.

Soit $x \in \mathbf{R}^\star$. Alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \mathrm{o}(x^3)\right)} - 1\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^3}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right) - 1\right)$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et que la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{12}$ est tangente à f en zéro. De plus en regardant le terme d'ordre trois, on voit que la courbe représentative de f est localement en-dessous de sa tangente en zero.

Exercice 114

Soit $x \in \mathbf{R}^\star$ tel que : $\forall n \in \mathbf{N},\quad n^x \in \mathbf{N}$. On définit pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\Delta(u_n) = u_{n+1} - u_n$.

1) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbf{N}^\star$,

$$\Delta^k(n^x) = \Delta \circ \ldots \circ \Delta(n^x) \underset{n\to\infty}{=} x(x-1)\ldots(x-k+1)n^{x-k} + \mathrm{o}\left(n^{x-k}\right).$$

2) En déduire que $x \in \mathbf{N}$.

►Correction.

1) Faisons une récurrence sur k. Pour $k = 1$, on écrit pour tout entier $n \in \mathbf{N}$:
$\dfrac{(n+1)^x - n^x}{n^{x-1}} = (n+1)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{x-1} - (n+x) \underset{n\to\infty}{=} (n+1)\left(1 + \dfrac{x-1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - (n+x)$. Après simplifications on a bien que :
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^x - n^x}{n^{x-k}} = 0$.
Supposons maintenant la propriété vraie au rang k. Alors
$\Delta^{k+1}(n^x) = \Delta \circ \Delta^k(n^x) \underset{n\to\infty}{=} \Delta\left(x(x-1)\ldots(x-k+1)n^{x-k} + \mathrm{o}\left(n^{x-k}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} x(x-1)\ldots(x-k+1)((n+1)^{x-k} - n^{x-k}) + \mathrm{o}\left((n+1)^{x-k}\right) - \mathrm{o}\left(n^{x-k}\right)$. D'où
$\Delta^{k+1}(n^x) \underset{n\to\infty}{=} x(x-1)\ldots(x-k+1)((n+1)^{x-k} - n^{x-k}) + \mathrm{o}\left(n^{x-k}\right)$. D'autre part, on montre facilement que
$(n+1)^{x-k} - n^{x-k} \underset{n\to\infty}{=} n^{x-k-1}(x-k) + \mathrm{o}\left(n^{x-k-1}\right)$. En injectant dans le développement précédent on trouve
$\Delta^{k+1}(n^x) \underset{n\to\infty}{=} x(x-1)\ldots(x-k)n^{x-k-1} + \mathrm{o}\left(n^{x-k-1}\right)$. C'est bien l'égalité au rang $k+1$.

2) On choisit $k \in \mathbf{N}^\star$ de sorte que $n^{x-k} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, par exemple $k = \lfloor x \rfloor + 1$. Alors pour ce même entier k, $\Delta^k(n^x) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.
La suite $\left(\Delta^k(n^x)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'entiers par hypothèse, non nuls si x non entier (dans ce cas $x(x-1)\ \ldots(x-k+1) \neq 0$, donc $\Delta^k(n^x)$ est équivalente en n à une suite qui est strictement positive pour tout n, elle est donc strictement positive pour n assez grand).
Donc si elle converge, c'est forcément vers un entier non nul, or on a vu qu'elle convergeait vers zéro. Contradiction.

Exercice 115
Soient $n \geqslant 0$ et $\Phi : \begin{cases} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(0), \dots, P(n)) \end{cases}$.
Montrer que Φ est un isomorphisme et déterminer Φ^{-1}.

►Correction.
L'application est clairement linéaire. Soit $P \in \operatorname{Ker} \Phi$. Alors $0, \dots, n$ sont des racines de P, comme P est de degré au plus n il est nul. Mais $\dim \mathbf{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbf{R}^{n+1}$ donc Φ est même bijective.
Soit $(p_0, \dots, p_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. On cherche $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $P(p_i) = P(i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Le polynôme interpolateur de Lagrange de la famille $(p_i, P(i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ fait le travail : $P = \sum_{i=0}^{n} P(i) \dfrac{\prod_{j \neq i}(X - p_j)}{\prod_{j \neq i}(p_i - p_j)}$.

Exercice 116
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f_i \circ f_j = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts, et que $f_1 + \dots + f_n = \mathrm{Id}_E$.

1) Montrer que $f_1, \dots, f_n$ sont des projecteurs.

2) Montrer que : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(f_i)$

►Correction.

1) Chaque f_i est linéaire par hypothèse. Soit $x \in E$, alors $f_i^2(x) + \sum_{j \neq i} f_i \circ f_j(x) = x$ en composant par f_i dans l'hypothèse de départ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. D'où $f_i^2(x) = f_i(x)$ pour tout $x \in E$, et pour tout i.

2) Soit $x \in E$. Montrons : $\exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(f_i - \mathrm{Id}_E) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i$ tel que $x = x_1 + \dots + x_n$.
Si une telle décomposition existe, alors $f_i(x) = f_i(x_i) = x_i$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$. On a donc démontrer l'existence et l'unicité d'une telle décomposition, d'où la somme directe.

Exercice 117
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f, g] = f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1) Que dire de $[.,.] : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ du point de vue de sa linéarité ?

2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$[f, g^n] = f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}.$$

3) Montrer que $\left(g^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est une famille libre *i.e.*toute sous-famille finie de $\left(g^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est libre.

►Correction.

1) Démontrons le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a exactement l'hypothèse de l'énoncé. Supposons le résultat vrai au rang n. Alors
$$f g^{n+1} - g^{n+1} f = f g^n g - g^n g f = (f g^n - g^n f) g + g^n = n g^n + g^n,$$
d'après l'hypothèse de récurrence. Le résultat est donc établi.

2) On montre que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \longmapsto [g, f]$ est linéaire. De-même pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $f \longmapsto [f, g]$ est linéaire.
On dit que $[.,.]$ est bilinéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

3) Considérons $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbf{K}^r$ tel que
$$a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 g + \dots + a_r g^r = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$
Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on prend le crochet à gauche par f, et d'après **2)** :
$$[f, a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 g + \dots + a_r g^r] = a_0 [f, \mathrm{Id}_E] + a_1 [f, g] + \dots + a_r [f, g^r] = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$
Comme f et Id commutent pour la composition le premier terme disparait et on obtient
$$a_1 \mathrm{Id}_E + 2 a_2 g + \dots + r a_r g^{r-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$
En recommençant on annule successivement les termes jusqu'à obtenir $r! a_r = 0$ puis successivement $a_{r-1} = 0, \dots, a_0 = 0$.

Exercice 118
Soit $\mathbf{K}$ un corps. On note $\Delta : P \in \mathbf{K}[X] \longmapsto P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que Δ est une application linéaire, et déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$.

2) Montrer que $\Delta_{|\mathbf{K}_n[X]}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ est surjective sur un certain espace à préciser.

►Correction.

1) Si $P \in \operatorname{Ker} \Delta$, alors $P(X+1) = P(X)$. En particulier $P(0) = P(1) = \dots = P(n)$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$. Notant α cette valeur commune, on en déduit que $P - \alpha = 0$ donc que P est constant. Inversement, les polynômes constants sont bien dans $\operatorname{Ker} \Delta$.

2) Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Alors d'après la formule de Taylor : $P(X+1) = P(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$ d'où $\Delta(P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$. On constate donc que $\Delta(P) \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$.
Comme $\operatorname{Ker}\Delta$ est de dimension un, l'image est de dimension n. L'application est donc surjective sur $\mathbf{K}_{n-1}[X]$.

Exercice 119

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante telle que $\quad u_{n+1} + u_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers zéro. De quelle manière ?

2) Donner un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

►Correction.

1) On va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers zéro par valeurs supérieures.
Comme la suite est décroissante, elle admet une limite $l \in \overline{\mathbf{R}}$. Le passage à la limite dans la relation d'équivalence permet d'affirmer que $l = 0$, et que $2u_n \geqslant u_{n+1} + u_n > 0$ pour n assez grand.
En effet : si $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$ et $v_n > 0$ pour n assez grand, alors $u_n > 0$ pour n assez grand (écrire la convergence vers un du quotient avec ε assez petit pour le voir ...).

2) La décroissance donne

$$u_{n+1} + u_n \leqslant 2u_n \leqslant u_{n-1} + u_n.$$

Le théorème d'encadrement permet alors d'affirmer que $2u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 120

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^\star$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$.
Établir que $\quad \operatorname{Rg} u + \operatorname{Rg} u^2 \leqslant \dim E$.

►Correction.
Appliquons la formule du rang : $\operatorname{Rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$. Il suffit donc de démontrer que $\operatorname{Rg} u^2 \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$.
Or $u^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Ker} u$, le passage à la dimension conclut.

Exercice 121

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^\star$ et $\{e_1, ..., e_n\}$ une famille de E. On suppose que
$\forall f \in E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbf{K}), \quad f(e_1) = ... = f(e_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0$.
Montrer que $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E.

►Correction.
Montrer que la famille $\{e_1, ..., e_n\}$ est génératrice. Comme elle comporte n éléments et que $\dim E = n$ cela est suffisant.
Supposons le contraire, alors $\operatorname{Vect}\{e_1, ...e_n\} \neq E$ et soit H un hyperplan tel que $\operatorname{Vect}\{e_1, ...e_n\} \subset H$, $f \in E^\star$ telle que $\operatorname{Ker} f = H$. L'hyperplan H existe bien : en effet, si $\operatorname{Vect}\{e_1, ...e_n\}$ est de dimension $\dim E - 1$ alors $H = \operatorname{Vect}\{e_1, ...e_n\}$ convient. Sinon on complète $\operatorname{Vect}\{e_1, ...e_n\}$ en un espace de dimension $n-1$.
Alors par construction $f(e_1) = ... = f(e_n) = 0$ et pourtant $f \neq 0$ puisque H est un hyperplan. Contradiction !

Exercice 122

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que : $E = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f$ si et seulement si : $\operatorname{Im}(gf) = \operatorname{Im} g$.

►Correction.

$\Longrightarrow$|Soit $y \in \operatorname{Im} g$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Le vecteur x se décompose en $x = x_1 + x_2$ avec $g(x_1) = 0$ et $x_2 \in \operatorname{Im} f$. Donc $y = g(x_2)$ et $y \in \operatorname{Im}(gf)$. L'autre inclusion est évidente.
$\Longleftarrow$|On a évidemment $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f \subset E$. Soit $x \in E$, on cherche $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} g \times \operatorname{Im} f$ tel que $x = x_1 + x_2$. La quantité $g(x)$ appartient à $\operatorname{Im} g$ donc par hypothèse il existe $x_2 \in E$ tel que $g(x) = gf(x_2')$. On pose donc $x_2 = f(x_2')$ et $x_1 = x - x_2$.
Alors $x = x_1 + x_2$ par construction et : $g(x_1) = g(x) - g(x_2) = g(x) - g(x) = 0$ d'une part, d'autre par $x_2 \in \operatorname{Im} f$.

Exercice 123

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Si $P \in \mathbf{K}[X]$, définir l'endomorphisme $P(f)$.

2) Montrer que pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbf{K}$ et $P \in \mathbf{K}[X]$: $\quad f(x) = \lambda x \quad \Longrightarrow \quad P(f)(x) = P(\lambda)x$.

3) Montrer que pour tous $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tous distincts, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{Id}_E), ..., \operatorname{Ker}(f - \lambda_p \operatorname{Id}_E)$ sont en somme directe.

►Correction.

1) Si $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ alors $P(f)=a_0\,\mathrm{Id}_E+\sum_{k=1}^{p} a_k f^k$.

2) Si $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ alors $P(f)(x)=a_0\,\mathrm{Id}_E(x)+\sum_{k=1}^{p} a_k f^k(x)=a_0x+\left(\sum_{k=1}^{p} a_k\lambda^k\right)x=P(\lambda)x$.

3) On note pour tout $i\in\{1,\dots,p\}$, $E_{\lambda_i}=\mathrm{Ker}(f-\lambda_i\,\mathrm{Id}_E)$.

Soit $x\in E_{\lambda_1}+E_{\lambda_2}+\dots+E_{\lambda_p}$, alors $x=x_1+\dots+x_p$ avec $(x_1,\dots,x_p)\in\prod_{k=1}^{p}E_{\lambda_k}$. Montrons que les x_i sont déterminés de manière unique.

En effet : si $x=x_1+\dots+x_p$, alors pour tout $k\geqslant 0$, $f^k(x)=\lambda_1^k x_1+\dots+\lambda_p^k x_p$, et de manière générale pour tout polynôme $P\in\mathbf{K}[X]$ on a $P(f)(x)=P(\lambda_1)x_1+\dots+P(\lambda_p)x_p$. Ceci nous incite donc à choisir P qui annule tous les termes sauf un, *i.e.*de prendre $P_i=\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)$. On a alors $P_i(f)(x)=P_i(\lambda_i)x_i=\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)x_i$, la quantité x_i est donc donnée de manière unique par $x_i=\dfrac{P_i(f)(x)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)}$ puisque les λ_i sont tous distincts. La somme est donc directe.

Exercice 124

Soient E un espace vectoriel, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer que si F_1 et F_2 ont un supplémentaire commun alors ils sont isomorphes.

2) La réciproque est-elle vraie ?

►Correction.

1) Notons p le projecteur sur F_2 parallèlement à S où S est un supplémentaire commun à F_1 et F_2. Alors $p:F_2\oplus S=F_1\oplus S=E\longrightarrow F_2$ et $S=\mathrm{Ker}\,p$. Alors $p_{|F_1}\in\mathcal{L}(F_1,F_2)$ est une application bijective. En effet : $\mathrm{Ker}\,p_{|F_1}=\mathrm{Ker}\,p\cap F_1=\{0_E\}$ et $\dim F_1=\dim F_2$.

2) D'après un exercice précédent, si deux espaces ont même dimension (donc s'ils sont isomorphes) alors on peut construire un supplémentaire commun. En dimension finie, la réciproque est donc vraie.
On va construire un contre-exemple en dimension infinie. On note $F_1=\mathbf{K}[X]$ et $F_2=\mathrm{Vect}\left\{X,X^2,\dots\right\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$. Ils sont isomorphes via $P\longmapsto XP(X)$, pourtant F_1 n'admet que $\{0\}$ comme supplémentaire, et $\{0\}$ n'est pas supplémentaire de F_2.

Exercice 125

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que
f est un projecteur $\iff$ $\mathrm{Rg}\,f+\mathrm{Rg}(\mathrm{Id}_E-f)=\dim E$.

►Correction.

$\Longrightarrow$|Ce sens est direct d'après le cours : pour tout projecteur $g\in\mathcal{L}(E)$, on a $\mathrm{Ker}\,g\oplus\mathrm{Im}\,g=E$, donc $\dim E=\mathrm{Rg}\,g+\dim\mathrm{Ker}\,g$. Mais $g:=\mathrm{Id}_E-f$ est un projecteur si f est un projecteur (on permute direction et espace sur lequel on projette), donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E-f)\oplus\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E-f)=E=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E-f)$.
$\Longleftarrow$|Supposons donc que $\mathrm{Rg}\,f+\mathrm{Rg}(\mathrm{Id}_E-f)=\dim E$. Alors montrons que f est un projecteur : plus précisément un projecteur sur $\mathrm{Im}\,f$ de direction $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$.
Montrons déjà que ces deux espaces sont en somme directe. En effet on a d'une part $\mathrm{Rg}\,f+\mathrm{Rg}(\mathrm{Id}_E-f)=\dim E$ par hypothèse, et d'autre part pour tout $x\in E$, on a $x=\underbrace{x-f(x)}_{\in\mathrm{Im}\,\mathrm{Id}_E-f}+\underbrace{f(x)}_{\in\mathrm{Im}\,f}$. On récupère le caractère somme directe.
Puisque $f(x-f(x)+f(x))=f(x)$, f apparaît bien comme le projecteur sur $\mathrm{Im}\,f$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 126

Soit $n\in\mathbf{N}$. Déterminer un développement limité à l'ordre $2n+2$ de $f:x\longmapsto\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ au voisinage de zéro.

►Correction.

La fonction f est bien définie et dérivable sur $]-1,1[$. On a de plus pour tout $x\in]-1,1[$, $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1-x)}=\dfrac{1}{1-x^2}\underset{x\to 0}{=}1+x^2+\dots+x^{2n}+x^{2n+2}+\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$. Comme $f(0)=0$, le théorème de primitivation des développements limités nous donne
$f(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+\dots+\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$.

Exercice 127

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Rg}\,f=1$.
Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbf{K}$ tel que : $f^2=\lambda f$.

►Correction.

Notons $e\in E$ tel que $\mathrm{Vect}(e)=\mathrm{Im}\,f$. Alors pour tout $x\in E$, il existe $\lambda_x\in\mathbf{K}$ tel que $f(x)=\lambda_x e$ et donc $f^2(x)=\lambda_x^2 e=\lambda_x f(x)$.
Montrons qu'en fait $\lambda_x=\lambda$ pour un certain $\lambda\in\mathbf{K}$ et ce pour tout $x\in E$.
La technique de preuve qui suit est à rapprocher des exercices suivants : si pour tout $x\in E$, il existe $\lambda_x\in\mathbf{K}$ tel que $f(x)=\lambda_x x$ alors il existe $\lambda\in\mathbf{K}$ tel

que $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$. Ou encore si $\alpha, \beta \in E^\star$ telles que pour tout $x \in E$, $\alpha(x) = 0$ ou $\beta(x) = 0$, alors $\alpha = 0_{E^\star}$ ou $\beta = 0_{E^\star}$.
Soient donc $x, y \in E$, et montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.
Cas 1 – supposons que $(f(x), f(y))$ est libre.
On a $f^2(x+y) = \lambda_{x+y} f(x+y) = \lambda_{x+y} f(x) + \lambda_{x+y} f(y)$ d'une part, d'autre part on peut dire que $f^2(x+y) = f^2(x) + f^2(y) = \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y)$.
Comme $(f(x), f(y))$ est supposée libre, on obtient $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$.
Cas 2 – supposons que $(f(x), f(y))$ est liée.
Soit $\alpha \neq 0$ tel que $f(x) = \alpha f(y)$ et donc $f^2(x) = \alpha f^2(y)$. Alors $\alpha\lambda_x f(y) = \lambda_x f(x) = f^2(x) = \alpha f^2(y) = \alpha\lambda_y f(y)$.
Soit $f(y) \neq 0$, auquel cas on obtient $\lambda_x = \lambda_y$. Soit $f(y) = 0 = f(x)$, et n'importe quelle valeur de λ convient.
Finalement dans tous les cas l'application $x \in E \longmapsto \lambda_x \in \mathbf{K}$ est constante.

Exercice 128

1) Montrer que $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f : x \longmapsto x e^{x^2}$ admet une bijection réciproque sur un intervalle à préciser.

2) Calculer le développement limité à l'ordre cinq de f^{-1} en zéro.

►Correction.

1) La fonction f est croissante strictement, car elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = e^{x^2}(1+2x^2) > 0$. Elle est donc également continue et le théorème de la bijection donne le caractère bijectif de f de $\mathbf{R}$ vers $\left[\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to\infty} f(x)\right] = [-\infty; \infty]$.

2) On a donc $f^{-1} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. On ne peut pas calculer explicitement la fonction réciproque, mais on peut quand-même obtenir un développement limité. En effet, comme la dérivée de f ne s'annule pas on sait que f^{-1} possède un développement limité d'ordre cinq en zéro (f^{-1} est $\mathcal{D}^\infty$, tout comme f). Or, f est impaire donc f^{-1} l'est aussi. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que
$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + dx^5 + o\left(x^5\right)$. Composons par f : $x \underset{x\to 0}{=} f\left(ax + bx^3 + dx^5 + o\left(x^5\right)\right)$, or $f(x) = x\left(1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)\right) = x + x^3 + \dfrac{x^5}{2} + o\left(x^5\right)$.
Il nous reste donc à identifier les deux développements limités :
$x = \left(ax + bx^3 + dx^5 + o\left(x^5\right)\right) + \left(ax + bx^3 + dx^5 + o\left(x^5\right)\right)^3 + \dfrac{(ax + bx^3 + dx^5 + o(x^5))^5}{2} + o\left(x^5\right)$. On obtient finalement par unicité du développement limité
$a = 1, \quad b = -1, \quad d = \dfrac{5}{2}$.

Exercice 129

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence
$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u \iff u^2 = 0, \quad \dim E = 2\operatorname{Rg} u$.

►Correction.

$\Longrightarrow$|Supposons que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$. Alors pour tout $x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$ et donc $u(u(x)) = 0$. Le théorème du rang fournit la deuxième partie de la proposition.
$\Longleftarrow$|$u^2 = 0$ fournit $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Montrons par un argument de dimension qu'il y a égalité des deux ensembles. En effet $\operatorname{Rg} u + \dim\operatorname{Ker} u = \dim E = 2\operatorname{Rg} u$, donc $\dim\operatorname{Ker} u = \operatorname{Rg} u$ et le résultat s'en suit.

Exercice 130

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x}\,dx$ après avoir précisé la convergence.

►Correction.

Montrons tout d'abord que la fonction intégrée a un sens. Soit $x \in [0,1[$, alors $\dfrac{x^n - x^{2n}}{1-x} = x^n\dfrac{1-x^n}{1-x} \longrightarrow_{x\to 1} 1 \times (x^n)'(1) = n$. L'intégrande est donc prolongeable par continuité en $x = 1$ et continue sur $[0,1[$. L'intégrale est donc bien définie et elle désigne celle dudit prolongement par continuité.
Soit $x \in [0,1[$. Alors $\dfrac{x^n - x^{2n}}{1-x} = x^n(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = x^n + x^{n+1} + \ldots + x^{2n-1}$. On intègre ensuite chacun des termes :
$\displaystyle\int_0^1 \left(x^n + x^{n+1} + \ldots + x^{2n-1}\right) dx = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x}\,dx = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n$ où l'on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \geqslant 1$. Or, il existe une constant $\gamma \in \mathbf{R}$ telle que $H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ donc $H_{2n-1} - H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln(2n-1) - \ln n + o(1) \longrightarrow_{n\to\infty} \ln 2$.
Finalement la suite initiale converge bien et vers $\ln 2$.

Exercice 131

Soit $n \geqslant 2$, on note $d_n = \operatorname{PPCM}(2, \ldots, n)$, et $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx$.

1) Déterminer une majoration simple sur I_n. Que vaut $\lim_{n\to\infty} I_n$?

2) Montrer que $d_{2n+1} I_n \in \mathbf{N}^\star$ et en déduire une minoration de d_{2n+1}.

►Correction.

1) On montre que $I_n \leqslant \frac{1}{4^n}$. Pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ d'où $x^n(1-x)^n \leqslant \frac{1}{4^n}$. Il reste ensuite à intégrer, on en déduit ensuite la convergence vers zéro.

2) On part sur des intégrations par partie successives afin de calculer explicitement I_n. Notons $I_{n,p} = \int_0^1 x^n(1-x)^p \, dx$.
Une première intégration par parties puisque $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto (1-x)^p$ sont C^1 donne pour tout $n \geqslant 1$:
$I_{n,p} = \int_0^1 nx^{n-1}\frac{(1-x)^{p+1}}{p+1} \, dx = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}$. Pour $n=0$, un calcul explicite donne pour tout entier $p \geqslant 0$, $I_{0,p} = \frac{1}{p+1}$.
En itérant la relation précédente, on trouve $I_{n,p} = \frac{n!}{(p+1)\dots(p+n)} I_{0,p+n} = \frac{n!}{(p+1)\dots(p+n)}\frac{1}{p+n+1}$.
Prenant $p=n$, on trouve $I_n = \frac{n!}{(n+1)\dots(n+n)}\frac{1}{n+n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.
Donc $d_{2n+1}I_n$ est un entier puisque :
$\mathrm{PPCM}(2,\dots,2n+1) = \frac{(2n+1)!}{\mathrm{PGCD}(2,\dots,2n+1)}$ d'où $d_{2n+1}I_n = \frac{(n!)^2}{\mathrm{PGCD}(2,\dots,2n+1)} = (n!)^2$.

Exercice 132

Soit $f \in C([0,1],\mathbf{R})$, calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

►Correction.
Comme f est continue, considérons une primitive de f sur $[0,1]$ notée F. Alors la limite se réecrit

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(0) = f(0).$$

Exercice 133

Soit E de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
En utilisant l'application $\Phi : (f,g) \in F\times G \longmapsto f+g \in E$, démontrer la formule de Grassman.

►Correction.
Par définition $\mathrm{Im}\,\Phi = F+G$. D'autre part, $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{(f,g)\in F\times G \mid f+g = 0_E\}$. La formule du rang donne donc

$$\dim\{(f,g)\in F\times G \mid f+g=0_E\} + \dim(F+G) = \dim(F\times G) = \dim(F)+\dim(G).$$

Pour démontrer la formule de Grassman il suffit de justifier que

$$\dim\left(\{(f,g)\in F\times G \mid f+g=0_E\}\right) = \dim(F\cap G).$$

Considérons l'application $\Psi : x \in F\cap G \longmapsto (x,-x) \in F\times G$. Comme F et G sont des espaces vectoriels, l'application ci-dessus est à valeurs dans $F\times G$. C'est de plus un isomorphisme car Ψ linéaire, injective ($(x,-x) = (0_E,0_E) \implies x = 0_E = -x$) et surjective sur $\{(f,g)\in F\times G \mid f+g=0_E\}$ par définition.

Exercice 134

On note $E = \mathcal{D}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$, et $\Phi,\Psi : E \longrightarrow E$ définis par $\Phi : f \longmapsto f'$, $\Psi : f \longmapsto \int_0^{\cdot} f(t)\,dt$.

1) Montrer que $(\Phi,\Psi) \in \mathcal{L}(E)^2$.

2) Les deux endomorphismes commutent-t-ils ?

3) Déterminer leurs images et noyaux.

►Correction.

1) Les applications Φ et Ψ sont des endomorphismes par linéarité de la dérivation d'une part, et de l'intégration d'autre part : pour toutes $f,g \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$, $\Psi(\lambda f+g)(x) = \int_0^x (\lambda f(t)+g(t))\,dt = \lambda\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt = \lambda\Psi(f)(x)+\Psi(g)(x)$. Cette égalité s'écrit dans E : $\Psi(\lambda f+g) = \lambda\Psi(f)+\Psi(g)$.

2) La relation fondamentale de l'analyse fournit pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$: $\Psi\circ\Phi(f) = f - f(0)$ et $\Phi\circ\Psi(f) = f$. Les deux endomorphismes ne commutent en général pas, sauf sur le sous-espace de E constitué des fonctions s'annulant en zéro.

3) $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{f \in E \ : \ f' = 0\}$, $\mathrm{Ker}\,\Phi$ est donc l'ensemble des fonctions constantes. Soit $f \in \mathrm{Ker}\,\Psi$, alors pour tout $x \in E$, on a $\int_0^x f(t)\,dt = 0$.
Comme f est au moins dérivable elle est en particulier continue et on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ en dérivant l'identité précédente. D'où $\mathrm{Ker}\,\Psi = \{0_E\}$.
⚠ **Attention.** On est en dimension infinie donc pas de théorème du rang !

Soit $g \in \operatorname{Im}\Phi$, alors il existe $f \in \mathrm{E}$ vérifiant $f' = g$. Nécessairement pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $g \in \mathrm{E}$, on a donc $\left(\int_0^{\cdot} g(t)\,\mathrm{d}t\right)' = g$ avec $\int_0^{\cdot} g(t)\,\mathrm{d}t \in \mathrm{E}$, donc $\operatorname{Im}\Phi = \mathrm{E}$.

Soit $g \in \operatorname{Im}\Psi$, alors il existe $f \in \mathrm{E}$ telle que $\int_0^{\cdot} f(t)\,\mathrm{d}t = g$. Comme $\int_0^{\cdot} g'(t)\,\mathrm{d}t = g - g(0)$ on en déduit que toutes les fonctions s'annulant en zéro sont dans $\operatorname{Im}\Psi$ (avec pour f associé la fonction g). Inversement, toute fonction du type $\int_0^{\cdot} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $f \in \mathrm{E}$ s'annule en zéro.

D'où $\operatorname{Im}\Psi = \{g \in \mathrm{E} \quad : \quad g(0) = 0\}$.

Exercice 135

On note $\mathrm{I} = [-1, 1]$ et soit $f \in \mathcal{C}^0_m(\mathrm{I})$. On dit que f est *faiblement dérivable* sur I s'il existe une fonction $\partial_w f \in \mathcal{C}^0_m(\mathrm{I})$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}), \quad \varphi(-1) = \varphi(1) = 0, \qquad \int_{\mathrm{I}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathrm{I}} \partial_w f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

On note $\mathcal{D}^1_w(\mathrm{I})$ l'ensemble de ces telles fonctions, on appelle $\partial_w f$ une *dérivée faible* de f.

1) Donner une inclusion entre $\mathcal{C}^1(\mathrm{I})$ et $\mathcal{D}^1_w(\mathrm{I})$.

2) Étudier l'appartenance de la valeur absolue à $\mathcal{D}^1(\mathrm{I})$ et $\mathcal{D}^1_w(\mathrm{I})$. Y-a-t-il unicité de $\partial_w f$?

►Correction.

1) Le vocabulaire est clair : on s'attend à ce qu'une fonction dérivable le soit aussi faiblement. Montrons-le.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I})$ une fonction dérivable et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{I})$, $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Alors en intégrant par parties on obtient : $\int_{\mathrm{I}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathrm{I}} \partial_w f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\partial_w f = f'$ la dérivée classique.

2) La valeur absolue n'est pas dérivable sur $[-1, 1]$. Cependant on peut démontrer qu'elle l'est faiblement. En effet :

soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{I})$ telle que $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Alors $\int_{-1}^1 |x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 1\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 1\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^1 \partial_w\,|x|\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ où $\partial_w\,|.|$ désigne n'importe quelle fonction valant -1 sur $[-1, 0[$ et 1 sur $[0, 1[$. Les crochets étant nuls via les hypothèses sur φ.

On constate donc qu'il n'y a pas unicité de la dérivée faible; l'intégrale d'une fonction continue par morceaux est définie comme étant l'intégrale de son prolongement continue, la valeur que l'on met aux points de discontinuité est donc arbitraire. Abracadabra$1 + 1$

Exercice 136

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose : $\quad \mathrm{M}(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, il existe $z \in \mathbf{R}$ tel que $\mathrm{M}(x)\mathrm{M}(y) = \mathrm{M}(z)$.

►Correction.

Les formules de trigonométrie hyperbolique nous donnent directement $z = x + y$.

Exercice 137

1) Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbf{R}^n$. On suppose que ${}^{\mathsf{T}}\mathrm{X}\mathrm{Y} \neq -1$.

Montrer qu'alors $\mathrm{I}_n + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y} \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ et que : $\quad \left(\mathrm{I}_n + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\right)^{-1} = \mathrm{I}_n - \dfrac{\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}}{1 + {}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}}$.

2) Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbf{R}^n$. On suppose que : $\quad {}^{\mathsf{T}}\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y} \neq -1$.

Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y} \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ avec $\left(\mathrm{A} + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\right)^{-1} = \mathrm{A}^{-1} - \dfrac{\mathrm{A}^{-1}\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{A}^{-1}}{1 + {}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{X}}$.

►Correction.

1) Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbf{R}^n$. On suppose que ${}^{\mathsf{T}}\mathrm{X}\mathrm{Y} \neq -1$. On calcule alors $(\mathrm{I}_n + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y})\left(\mathrm{I}_n - \dfrac{\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}}{1 + {}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}}\right)$ et on montre que c'est l'identité de format $n \times n$.

Notons aussi que $\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y} \in \mathbf{R}$, la division par $1 + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}$ (X est de format $n \times 1$ et ${}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}$ de format $1 \times n$) est donc parfaitement définie.

$(\mathrm{I}_n + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y})\left(\mathrm{I}_n - \dfrac{\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}}{1 + {}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}}\right) = \mathrm{I}_n - \dfrac{\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}}{1 + {}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}} + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y} - \dfrac{(\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y})^2}{1 + {}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}} = \mathrm{I}_n + \dfrac{-\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y} + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}(1 + {}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}) - \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}(\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y})}{1 + {}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}}$ en réduisant au même dénominateur.

Le terme ${}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}$ est un scalaire, on peut donc le déplacer n'importe où dans les calculs, pour obtenir finalement :

$(\mathrm{I}_n + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y})\left(\mathrm{I}_n - \dfrac{\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}}{1 + {}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}}\right) = \mathrm{I}_n - \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}({}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}) - \mathrm{X}({}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X})^{\mathsf{T}}\mathrm{Y} = \mathrm{I}_n + \dfrac{({}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X})(\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y} - \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y})}{1 + {}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{X}} = \mathrm{I}_n$.

2) On peut se ramener au cas précédent en factorisant par A à droite :

$\left(\mathrm{A} + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\right)^{-1} = \left((\mathrm{I}_n + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{Y}\mathrm{A}^{-1})\mathrm{A}\right)^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\left(\mathrm{I}_n + \mathrm{X}^{\mathsf{T}}({}^{\mathsf{T}}(\mathrm{A}^{-1})\mathrm{Y})\right)^{-1}$. On applique **1)** avec ${}^{\mathsf{T}}(\mathrm{A}^{-1})\mathrm{Y}$ au lieu de Y qui vérifie bien l'hypothèse demandée puisque ${}^{\mathsf{T}}\mathrm{X}^{\mathsf{T}}(\mathrm{A}^{-1})\mathrm{Y} \neq -1$. On obtient la formule de l'énoncé.

Exercice 138
Soient $a < b$ et $f, g \in C^0([a,b], \mathbf{R})$ monotones de même monotonie.

1) Montrer que : $\forall x, y \in [a,b], \quad (f(y)-f(x))(g(y)-g(x)) \geqslant 0.$

2) En déduire : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$

►Correction.

1) Supposons que $x \geqslant y$ et que f, g sont croissantes. Alors le produit est positif, sinon le cas décroissant se traite de la même façon, de-même pour $x \leqslant y$.

2) Développons la quantité précédente : pour tous $x, y \in [a,b]$,

$$f(y)g(y) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(x) \geqslant 0.$$

En intégrant en x sur $[a,b]$, on obtient pour tout $y \in [a,b]$:

$$f(y)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)f(y)g(y) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant ensuite en y :

$$2\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) - (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 139
Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ avec $n \geqslant 0$.

Montrer que : $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \geqslant 0.$

►Correction.
Le point clef est l'interprétation suivante : pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ on a :

$\displaystyle\frac{1}{i+j+1} = \int_0^1 x^{i+j}\,\mathrm{d}x$. Sommons ensuite par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\int_0^1 a_i a_j x^i x^j\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} a_i a_j x^i x^j\right)\mathrm{d}x.$

Pour finir, comme les variables de sommation sont séparées, on obtient : $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} = \int_0^1 \left(\sum_{0\leqslant i\leqslant n} a_i x^i\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 0.$

Exercice 140
Donner un équivalent lorsque $n \to \infty$ de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2+k^2}\right)_{n\in\mathbf{N}}.$

►Correction.
On interprète la somme comme une intégrale. En effet : pour tout entier $n \geqslant 1$,

$\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = n \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \sim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ avec f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \arctan'(x)$. Elle est bien continue sur $[0,1]$.

D'où l'équivalent $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2+k^2} \sim_{n\to\infty} n(1-\pi/4).$

Exercice 141
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

1) Montrer que :

$$\mathrm{Tr}\left({}^{\mathbf{T}}(\mathrm{AB}-\mathrm{BA})(\mathrm{AB}-\mathrm{BA})\right) = 2\left(\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2) - \mathrm{Tr}((\mathrm{AB})^2)\right).$$

2) En déduire l'inégalité : $\mathrm{Tr}\left((\mathrm{AB})^2\right) \leqslant \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2).$

►Correction.

1) Les matrices A et B vérifient ${}^{\mathbf{T}}\mathrm{A} = \mathrm{A}$ et ${}^{\mathbf{T}}\mathrm{B} = \mathrm{B}$. D'où
$\mathrm{Tr}\left({}^{\mathbf{T}}(\mathrm{AB}-\mathrm{BA})(\mathrm{AB}-\mathrm{BA})\right) = \mathrm{Tr}(\mathrm{BA}^2\mathrm{B}) - \mathrm{Tr}((\mathrm{BA})^2) - \mathrm{Tr}((\mathrm{AB})^2) + \mathrm{Tr}(\mathrm{AB}^2\mathrm{A})$ par linéarité de la trace et symétrie des matrices A et B. Comme la trace est invariante par transposition, on a par symétrie de A et B :
$\mathrm{Tr}((\mathrm{BA})^2) = \mathrm{Tr}((\mathrm{AB})^2)$. Par ailleurs, la trace d'un produit ne dépend pas de l'ordre. On écrit donc successivement :
$\mathrm{Tr}((\mathrm{BA}^2)\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{B}(\mathrm{BA}^2)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{B}^2\mathrm{A}^2) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}^2\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)$. De tout ceci on en déduit la formule.

2) Déduisons l'inégalité : $\operatorname{Tr}\left((AB)^2\right) \leqslant \operatorname{Tr}\left(A^2B^2\right)$.

Si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors $\operatorname{Tr}({}^{\mathsf{T}}MM) = \operatorname{Tr}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \left({}^{\mathsf{T}}M\right)_{i,k} M_{k,j}\right)_{i,j}\right) = \operatorname{Tr}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \left({}^{\mathsf{T}}M\right)_{i,k} M_{k,j}\right)_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2 \geqslant 0$.

Le membre de gauche de **1)** est donc positif et l'inégalité est démontrée, sur l'espace vectoriel des matrices symétriques uniquement.

Exercice 142

1) Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commute avec une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficients deux à deux distincts ?

2) On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver une matrice $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3) Résoudre l'équation $X^2 - 2X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

►Correction.

1) On note $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $i \neq j$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, les coefficients de A. L'égalité $AD = DA$ donne pour tout i, j : $a_{i,j}\lambda_j = \lambda_i a_{i,j}$, d'où par hypothèse $a_{i,j} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$.
La matrice A est donc nécessairement diagonale.

2) Prenant une matrice $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$, on trouve $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui convient en remplaçant dans l'égalité matricielle $AP = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3) Notons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors l'équation se réecrit $(P^{-1}XP)^2 - 2P^{-1}XP = D$, ce qui est donc une équation en l'inconnue $Y = P^{-1}XP$. Prenons Y sous la forme $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on résout alors $Y^2 - 2Y = D = Y(Y - 2I_2)$. Si Y est une solution alors $YD = DY$ puisque D est un polynôme en Y. Donc Y est également une matrice diagonale de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. En injectant dans l'identité on trouve $\alpha^2 - 2\alpha = -1$ et $\beta^2 - 2\beta = 3$. Donc $\alpha = 1$ et $\beta \in \{3, -1\}$.

Exercice 143

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ l'endomorphisme u défini dans une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbf{R}^4$ par : $u(e_1) = e_3, u(e_2) = e_4, u(e_3) = u(e_4) = 0$.

1) A-t-on $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = \mathbf{R}^4$?

2) Déterminer la matrice de $u_{|\operatorname{Im} u}$ dans une base de $\operatorname{Im} u$.

►Correction.

1) La matrice de u dans la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate immédiatement que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}\{e_3, e_4\} = \operatorname{Im} u$ et donc que la somme n'est pas directe.

2) La matrice de $u_{|\operatorname{Im} u}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 144

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ une application non nulle, avec $n \geqslant 1$, vérifiant $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))^2, \quad f(A.B) = f(A)f(B)$.
Montrer que : A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

►Correction.

$\Longrightarrow$|Soit A une matrice inversible. Alors $f(AA^{-1}) = f(I_n)$ et on obtient $f(I_n) = f(A)f(A^{-1})$. Or $f(I_n)^2 = f(I_n)$ donc $f(I_n)(f(I_n) - 1) = 0$ et nécessairement $f(I_n) = 1$ ou $f(I_n) = 0$.
$f(I_n) = 0$ implique la nullité de f : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f(A) = f(A)f(I_n) = 0$ donc nécessairement $f(I_n) = 1$ et $f(A) \neq 0$ si A est inversible.
Montrons ce sens par contraposition *i.e.* $f(A) = 0 \Longrightarrow$ A non inversible.
En effet si $f(A) = 0$ alors pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on a $f(A.B) = 0$. En particulier si A était inversible on aurait une contradiction en prenant $B = A^{-1}$.

Exercice 145
Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $n \geqslant 1$, la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer U^2, le rang de U et son noyau.

2) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à U. Trouver une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $f(e_1) = ne_1, f(e_2) = 0, \dots, f(e_n) = 0$.

►Correction.

1) Soit $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, alors $(U^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} U_{i,k} U_{k,j} = n$. Donc $U^2 = nU$. Le rang de U est de manière évidente égal à un, le noyau est donc un hyperplan. Il est donné par l'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$.

2) On fixe $e_2, \dots, e_n \in \operatorname{Ker} f$, on complète le noyau avec un vecteur e_1. Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. Il n'est pas dans $\operatorname{Ker} f$ et vérifie $f(e_1) = ne_1$.

Le tout forme bien une base puisque $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Vect}(e_1) = \mathbf{R}^n$ (à vérifier avec des méthodes classiques).

Exercice 146
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3) \setminus \{0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)}\}$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

Montrer que $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ et qu'il existe une base $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que $\operatorname{Mat}_{e,e}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

►Correction.
Prenons $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ avec $x \in E$, donc $f^2(x) = 0$ et $f^3(x) + f(x) = 0 = 0 + f(x)$ donc $f(x) = 0$. L'intersection est nulle et le théorème du rang fournit le caractère somme directe.
Prenons $e_1 \in \operatorname{Ker} f$. On cherche e_2 et e_3 tels que $f(e_2) = -e_3$ et $f(e_3) = e_2$. On fixe donc $e_2 \in \operatorname{Im} f$ et on pose $e_3 := -f(e_2)$. Il existe $a \in E$ tel que $f(a) = e_2$ et donc $f(e_3) = -f^2(e_2) = -f^3(a) = f(a) = e_2$. Les deux relations sont établies. Pour justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base il suffit de vérifier que (e_2, e_3) est une base de $\operatorname{Im} f$. En effet, sinon il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $e_2 = \lambda e_3$ et $f(e_2) = \lambda f(e_3)$ donc $-e_3 = \lambda e_2 = \lambda^2 e_3$ et finalement puisque $e_3 \neq 0$ on a $\lambda^2 = -1$, contradiction.

Exercice 147
Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Montrer que $P = \frac{1}{\# G} \sum_{M \in G} M$ est un projecteur.

►Correction.
La somme est une somme classique finie puisque G est un sous-groupe fini. Plus précisément $G = \{G_1, \dots, G_n\}$ avec $n = \# G$ et $g_i \in G$ pour tout i et $P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} G_i$.

Il suffit de démontrer que $P^2 = P$. $P^2 = \left(\frac{1}{\# G}\right)^2 \left(\sum_{M \in G} M\right)\left(\sum_{N \in G} N\right) \left(\frac{1}{\# G}\right)^2 \left(\sum_{M,N \in G} MN\right)$. Pour tout $M \in G$, l'application $N \in G \longmapsto MN \in G$ est bijective. Donc
$\sum_{M,N \in G} MN = \sum_{M \in G} \sum_{N \in G} MN = \sum_{M \in G} \sum_{N \in G} N = P \frac{1}{\# G} \sum_{M \in G} I_n = P$.

Exercice 148
Nature de la série de terme général $\left(\sum \frac{1}{(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\right)_{n \geqslant 1}$.

►Correction.
La série est à termes positifs. Par ailleurs, un développement limité montre que

$$\frac{1}{(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \sim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2 n^{-1/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Le critère de Riemann permet alors de conclure quant à la divergence de la série.

Exercice 149
Soient $n \geqslant 1$, $\mathcal{B} = (1, \dots, X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

1) Soit $a_1 < ... < a_n$ une suite de n nombres réels. Que dire de l'application $T : P \in \mathbf{R}_{n-1}[X] \longmapsto (P(a_1), ..., P(a_n)) \in \mathbf{R}^n$?
En déduire que $(L_i)_{i=1}^n = (T^{-1}(e_i))_{i=1}^n$ est une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.

2) Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathcal{B}'$.

3) On note M la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Montrer que $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est inversible et calculer son inverse.

4) Calculer $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

►Correction.

1) On vérifie tout d'abord que T est une application linéaire.
La deuxième partie de la question incite à justifier que T est un isomorphisme. Si c'est le cas, T^{-1} en est un aussi, et la famille $\mathcal{B}'$ sera donc l'image de $\mathcal{B}$ par un isomorphisme donc $\mathcal{B}'$ sera une base.
Comme $\dim \mathbf{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbf{R}^n$, il suffit de regarder le noyau de T. Soit $P \in \operatorname{Ker} T$. Alors P s'annule en $a_1, ..., a_n$. Comme P est de degré au plus $n-1$ il est forcément nul.
Conclusion : T est un isomorphisme.
En Français : soit $i \in \{1, ..., n\}$. L'égalité $L_i = T^{-1}(e_i)$ signifie que $T(L_i) = (L_i(a_1), ..., L_i(a_n)) = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (1 en position i) $i.e.$ $L_i(a_k) = \delta_{i,k}$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.

2) Soit $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$. Comme la famille $\mathcal{B}'$ est une base, il existe une unique famille $(\mu_i)_{i=1}^n$ telle que $P = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i$ donc en évaluant en a_k pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ on a $P(a_k) = \mu_k \times 1 + 0$.
Ainsi $P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$, on a déterminé ses coordonnées.

3) Comme M est une matrice de passage entre deux bases, elles est inversible d'inverse la matrice de passage entre $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.
Calculons M^{-1} : dans cette matrice en met donc les éléments de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{B}'$. Soit $k \in \{0, ..., n-1\}$. Alors $X^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k L_i$ d'après la question précédente. On obtient finalement la matrice suivante :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

4) On a $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n-1} \end{pmatrix}$ et $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$ avec $MM^{-1} = I_n$. En regardant le coefficient $(1,1)$ du produit matriciel $MM^{-1} = I_n$ on obtient $\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$. Les coefficient $(2,1)$ jusque $(n,1)$ donnent $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$ pour $i \in \{2, ..., n\}$.

Exercice 150

Nature des séries de termes généraux $\left(\sum \frac{1}{n!} \prod_{k=2}^{n} \ln k\right)_{n\geqslant 2}$ et $\left(\sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right)_{n\geqslant 0}$.

►Correction.
La série est à termes positifs : il suffit donc de majorer le terme général par celui d'une série convergente.
$\forall n \geqslant 2,\quad \frac{1}{n!} \prod_{k=2}^{n} \ln k \leqslant \frac{(\ln n)^n}{n!} \sim_{n\to\infty} \frac{e^{n(\ln\ln n+1)}}{\sqrt{2\pi n} n^n}$, d'après la formule de Stirling.
En mettant en facteur $n \ln n$ dans les puissances de e on trouve

$$\frac{e^{n(\ln\ln n+1)}}{\sqrt{2\pi n} n^n} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{n\ln n\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n} + \frac{1}{\ln n} - 1 - \frac{1}{2n}\right)}.$$

Or par croissances comparées, $\frac{\ln\ln n}{\ln n} \to_{n\to\infty} 0$, donc

$$\frac{e^{n(\ln\ln n+1)}}{\sqrt{2\pi n} n^n} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-n\ln n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La convergence est alors démontrée.
On fait un développement limité, ce qui nous permet de voir que
$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \sim_{n\to\infty} e^n$. Ainsi la série diverge grossièrement.

Exercice 151

1) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer que la série $\left(\sum \frac{P(n)}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge. On note $S(P)$ sa somme.

2) On rappelle que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. On pose $L_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $L_k = X(X-1)...(X-k+1)$.
Calculer $S(L_k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

3) Calculer $S(X^3)$.

►Correction.

1) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Alors P s'écrit comme une somme finie de monômes : $P = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k$, avec $N \in \mathbf{N}$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ pour tout k. Comme une somme finie de séries convergentes est une série convergente, il suffit de démontrer que
$\forall k \in \{0, ..., N\}$, $\left(\sum \frac{n^k}{n!}\right)_{n \geqslant 0}$ converge .
On peut appliquer la formule de Stirling :

$$\frac{n^k}{n!} \sim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}.$$

Mettant tout sous forme exponentielle, on trouve $e^{k\ln n - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n} = e^{-n\ln n\left(-\frac{k}{n}+1-\frac{1}{\ln n}+\frac{1}{2n}\right)}$. On trouve un équivalent du type suivant :

$$\frac{n^k}{n!} \sim_{n\to\infty} e^{-n\ln n} =_{n\to\infty} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ce qui permet de conclure via le critère de Riemann pour les séries à termes positifs.

2) Pour tout k, L_k admet pour racines $0, 1, ..., k-1$. Donc

$$S(L_k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{L_k(n)}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{n!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e,$$

d'après ce qui a été précisé dans le rappel.

3) Le polynôme X^3 peut être exprimé à l'aide des L_k, une fois ceci fait on peut étendre le calcul précédent par linéarité.

$$X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X^2 - 2X = L_3 + 3X(X-1) + 3X - 2X = L_3 + 3L_2 + L_1.$$

Donc

$$S(X^3) = S(L_3) + 3S(L_2) + S(L_1) = e + 3e + e = 5e.$$

Exercice 152

Nature des séries de termes généraux $\left(\sum \int_0^{\frac{\pi}{2n}} e^x \tan x \,\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant 2}$ et $\left(\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}\right)_{n\geqslant 0}$, $a \in \mathbf{R}$.

►Correction.

Commençons par constater que la série est bien définie en tant qu'intégrales de fonctions continues sur les segments $\left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$ pour $n \geqslant 2$ (notamment on exclut $\frac{\pi}{2}$).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} e^x \tan x \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2n} e^{\frac{\pi}{2n}} \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2.$$

L'avant-dernière inégalité découle de la croissance de la fonction intégrée. On compare des séries à termes positifs, donc par le critère de Riemann, la série converge.

Si on regarde $a \in \mathbf{R}$, alors comme $\left|\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right| = \frac{|a|^n}{1+|a|^{2n}} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{|a|^n}$. Il y a donc convergence absolue lorsque $|a| > 1$ donc convergence. Si $a = 1$ ou -1 la série diverge grossièrement.
Pour finir dans le cas $a \in]-1, 1[$, on a
$\left|\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right| \sim_{n\to\infty} |a|^n$ et la série converge absolument.

Exercice 153

Soit $n \in \mathbf{N}$, on définit une application φ sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = (X-1)P' + P''(0)$ pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$.

1) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X])$.

2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

3) Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

4) Montrer que $\operatorname{Im}\phi = \{Q \in \mathbf{R}_n[X] : Q(0) + Q'(0) = 0\}$.

►Correction.

1) Comme P' est de degré inférieur à celui de P il est clair que l'on somme un polynôme de degré n avec une constante. Donc φ est) valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$. De plus par linéarité de la dérivation, l'application φ est dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X])$.

2) Soit $k \in \{3, ..., n\}$. Alors $\varphi(X^k) = k(X-1)X^{k-1} = kX^k - kX^{k-1}$. Si $k = 2$, on a $\varphi(X^2) = 2X^2 - 2X + 2$ et $\varphi(X) = X - 1$, $\varphi(1) = 0$. On en déduit la matrice M suivante : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 3 & \ddots & -n \\ 0 & & & & & n \end{pmatrix}$.

3) Soit $X = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ satisfaisant $MX = 0$. Alors la dernière ligne nous donne $nx_n = 0$ donc $x_n = 0$. L'avant-dernière $(n-1)x_{n-1} - nx_n = 0$ soit $x_{n-1} = 0$. On obtient finalement $x_1 = \dots = x_n = 0$ et on déduit que $P \in \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si P est constant.
Le noyau est donc de dimension un et par le théorème du rang l'image est de dimension $n+1-1 = n$.

Résolvons le système $MX = Y$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en X. On obtient

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 & = y_0 \\ x_1 - 2x_2 & = y_1 \\ 2x_2 - 3x_3 & = y_3 \\ \dots. & \\ (n-1)x_{n-1} - nx_n & = y_{n-1} \\ nx_n & = y_n \end{cases}$$

. En sommant les deux premières lignes on voit que le système est résoluble en $(x_0, \dots, x_n)$ si et seulement si on a l'égalité $y_0 + y_1 = 0$. L'image est donc
$\operatorname{Vect}\{(1-X, X^2, \dots., X^n)\}$.

4) On a $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \operatorname{Im}\varphi$, avec $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbf{R}^{n+1}$ si et seulement si $b_0 + b_1 = 0$. Mais comme $b_0 = Q(0)$ et $b_1 = Q'(0)$ on conclut quant à l'ensemble cherché.

Exercice 154

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante.

1) On suppose que $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est convergente. Montrer qu'alors : $u_n \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) La réciproque est-elle vraie ?

►Correction.

1) Soit $n \geqslant 0$, alors $(n+1)u_n = u_n + \dots + u_n \leqslant u_0 + \dots + u_n = U_n$. Comme $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est convergente, on sait que le membre de droite converge, mais cela n'est pas suffisant ici. On peut déjà constater que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est forcément positive par hypothèse.
Calculons plutôt $U_{2n} - U_n = u_{2n} + \dots + u_{n+1} \geqslant nu_{2n} \geqslant 0$. Comme la série est convergente, on a : $\lim_{n\to\infty}(U_{2n} - U_n) = \lim_{n\to\infty} U_n - \lim_{n\to\infty} U_n = 0$ par théorème d'encadrement et $2nu_{2n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.
D'autre part la suite des termes impairs a la même propriété : $U_{2n+1} - U_n \geqslant (n+2)u_{2n+1} \geqslant nu_{2n+1} \geqslant 0$ donc $2nu_{2n+1} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ et donc $(2n+1)u_{2n+1} = 2nu_{2n+1} + u_{2n+1} \longrightarrow_{n\to\infty} 0 + 0 = 0$ puisque $u_{2n+1} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ (la série associée est convergente).
En conclusion la suite $(nu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a ses suites extraites impaires et paires qui convergent vers zéro, donc la suite $(nu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers zéro.

2) La réciproque est fausse : il faut trouver une série divergente dont le terme général est décroissant et vérifie $u_n \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
On choisit $u_n = \frac{1}{n \ln n}$ qui diverge par comparaison série/intégrale.

Exercice 155

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite positive de limite nulle, dont on note $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sa somme partielle.
On suppose de plus que $(U_n - nu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée par $M \in \mathbf{R}$.

1) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \left|\frac{U_{n-1}}{n-1} - \frac{U_n}{n}\right| \leqslant M\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$.

2) En déduire que la série $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

►Correction.

1) On calcule en réduisant au même dénominateur :
pour tout $n \geqslant 2$, $\left|\frac{U_{n-1}}{n-1} - \frac{U_n}{n}\right| = \left|\frac{nU_{n-1} - n(U_{n-1} + u_n) + U_n}{n(n-1)}\right| = \left|\frac{-nu_n + U_n}{n(n-1)}\right| \leqslant \frac{M}{n(n-1)} = M\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$.

2) La série est à termes positifs, il suffit donc de montrer que U est une suite bornée.

Sommons l'encadrement entre $N+1$ et n, avec $N+1 \leqslant n$:
on obtient $0 \leqslant \frac{U_N}{N} - \frac{U_n}{n} \leqslant M\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n}\right)$ et ensuite en $U_N \leqslant \frac{N}{n}U_n + M\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{N}{n}(nu_n + M) + NM\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n}\right)$.
Deux termes se simplifient et on obtient :
$U_N \leqslant Nu_n + M$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers zéro, on choisit n_N assez grand de sorte que $|u_{n_N}| \leqslant \frac{1}{N}$. On obtient alors $U_N \leqslant M + 1$.
La suite des sommes partielles étant bornées, on obtient alors la convergence de la série $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 156

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

►Correction.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ en ajoutant la première colonne à toutes les autres.

Donc $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -16.$

Exercice 157

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ avec $n \geqslant 1$. Montrer que $\det(\bar{M}) = \overline{\det M}$.

2) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

►Correction.

1) Montrons le résultat par récurrence sur la dimension. Si $M = (a_{1,1})$ avec $a_{1,1} \in \mathbf{C}$, on a $\overline{\det M} = \overline{a_{1,1}} = \det \overline{M}$.
Supposons que le résultat est vraie au rang $n-1$.
Soit A une matrice de format $n \times n$. Alors

$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \\ a_{2,1} & \\ \vdots & \widetilde{A} \\ a_{n,1} & \end{vmatrix}$ avec $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{C})$. Développons suivant la première colonne : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}(-1)^{1+i} \det(\Delta_{i,1}(A))$, où $\Delta_{i,1}(A)$ désigne le mineur de A sans la i-ème ligne et la première colonne.

Donc $\overline{\det A} = \overline{\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}(-1)^{1+i} \det(\Delta_{i,1}(A))} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}\overline{a_{i,1}}\overline{\det(\Delta_{i,1}(A))}$.

Par hypothèse de récurrence, comme les mineurs sont de taille inférieure : $\overline{\det A} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}\overline{a_{i,1}} \det(\overline{\Delta_{i,1}(A)}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}\overline{a_{i,1}} \det(\Delta_{i,1}(\overline{A}))$.

On reconnaît ici le développement suivant la première colonne de la matrice $\overline{A}$. D'où le résultat par récurrence.
Remarque — En fait on constate que le déterminant est un polynôme à coefficients réels en les coefficients de la matrice. L'exercice découle alors d'une généralisation de la formule $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ avec $z \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{R}[X]$.

Exercice 158

Soient I un intervalle ouvert réel, et $C_1, C_2 : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ deux applications dérivables (*i.e.*chaque coordonnée est dérivable en tant que fonction de I dans $\mathbf{R}$).

1) Montrer que la fonction $t \in I \longmapsto \det(C_1(t), C_2(t))$ est dérivable sur I et exprimer sa dérivée.

2) En déduire une méthode pour calculer pour tout $t \in \mathbf{R}$, $A(t) = \begin{vmatrix} 1+t & 1 \\ 1 & 1+t \end{vmatrix}$.

►Correction.

1) Comme C_1 et C_2 sont dérivables sur I, il existe deux fonctions $\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \end{pmatrix}, \varepsilon^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_2^2 \end{pmatrix}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, telles que $\lim_{h\to 0} \varepsilon_j^i(h) = 0$ pour $i, j \in \{1,2\}$, et
$C_1(t+h) = C_1(t) + h(C^1)'(t) + \varepsilon^1(h), \quad C_2(t+h) = C_2(t) + h(C^2)'(t) + \varepsilon^2(h)$.
Donc $\det(C_1(t+h), C_2(t+h)) = \det\left(C_1(t) + h(C^1)'(t) + \varepsilon^1(h), C_2(t) + h(C^2)'(t) + \varepsilon^2(h)\right)$.
D'où :

$$\det(C_1(t+h), C_2(t+h)) = \det(C_1(t), C_2(t)) + h\det(C_1'(t), C_2(t)) + h\det(C_1(t), C_2'(t)) + \begin{pmatrix} \Sigma^1(h) \\ \Sigma^2(h), \end{pmatrix}$$

avec $\Sigma^i(h) \longrightarrow_{h\to 0} 0$ (pour connaitre l'expression exacte, développer le déterminant précédent).
La fonction de départ est donc dérivable sur I de dérivée :

$$\det(C_1(t), C_2(t))' = \det(C_1'(t), C_2(t)) + \det(C_1(t), C_2'(t))$$

En dérivant $\begin{vmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{vmatrix}$ *avec f, g deux fonctions dérivables, on retrouve la formule $(fg)' = f'g + fg'$.*

2) On en déduit alors facilement que $A'(t) = 2(1+t)$ donc en intégrant et en constatant que $A(0) = 0$ on a $A(t) = 2\left(t + \frac{t^2}{2}\right)$.

Exercice 159

Soit $n \geqslant 1$. Combien y-a-t-il de couples (x, y) :

1) dans $\{1, ..., n\}^2$ pour lesquels $x < y$?

2) dans $\{1, ..., n\}^2$ pour lesquels $|x - y| \leqslant 1$?

►Correction.

1) Notons E l'ensemble à dénombrer. Alors $E = \bigcup_{x\in\{1,\dots,n-1\}} E_x$ où $E_x = \{(x,y) : x+1 \leqslant y \leqslant n\}$ (c'est E avec une coordonnée fixée).

Ainsi, puisque la réunion est disjointe, on a $\# E = \sum_{x=1}^{n-1} \# E_x = \sum_{x=1}^{n-1} (n-x) = \sum_{x=1}^{n-1} x = \frac{n(n-1)}{2}$.

2) Notons E l'ensemble à dénombrer. Étant donné que $|x-y| \leqslant 1$ est équivalente à $-1+x \leqslant y \leqslant 1+x$, on a $E = \bigcup_{x\in\{1,\dots,n\}} E_x$ où $E_x = \{(x,y) : \max(1,x+1) \leqslant y \leqslant \min(x+1,n)\}$. Donc

$\# E = \sum_{x=1}^{n} (\min(x+1,n) - \max(x-1,1)+1) = \sum_{x=1}^{n-1}(x+1) + (n+1) - \sum_{x=2}^{n-1}(x-1) - 1.$

Exercice 160

Soit $r \in \{1,\dots,n\}$ et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}$.

1) Trouver une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\det(J_r + X) \neq \det(J_r) + \det(X)$.

2) Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$: $\det(M+X) = \det M + \det X$.

►Correction.

1) On a clairement $\det J_r = 0$. Il faut donc trouver X telle que $\det(J_r + X) \neq \det(X)$. La matrice $\widetilde{J_r} = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & I_{n-r}\end{pmatrix}$ fait l'affaire puisque $\det I_n = \det(J_r + \widetilde{J_r}) = 1$.

2) Soit M satisfaisant la propriété. Alors prenant $X = M$ on obtient $(2^{n-1}-1)\det M = 0$.
Lorsque $n \geqslant 2$, alors $\det M = 0$. Autrement dit M n'est pas inversible, donc son rang est strictement inférieur à n.
Soit M est la matrice nulle, on a clairement $\det(M+X) = \det M + \det X$ pour tout X dans ce cas.
Si M est non nulle, il existe $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $M = PJ_rQ$. Alors $\det(M + P\widetilde{J_r}Q) = \det(P)\left(J_r + \widetilde{J_r}\right)\det(Q) \neq \det M + \det(P\widetilde{J_r}Q)$ d'après **1)**.
Conclusion – M est la matrice nulle.

Exercice 161

À l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles de 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

►Correction.

On a forcément 5 filles et 5 garçons dans le classement final. Il y a $\binom{70}{5}$ possibilités pour les 5 garçons sélectionnés et $\binom{90}{5}$ possibilités pour les 5 filles. Une fois les 10 candidats choisis, on regarde le nombre de façon de les classer : 10 pour le premier, 9 pour le second etc.... donc 10! possibilité.
Finalement on a $\binom{70}{5} \times \binom{90}{5} \times 10!$ possibilités.

Exercice 162

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec $n \geqslant 1$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on note $\chi_M(x) = \det(M - xI_n)$.

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, on rappelle que P(M) désigne la matrice $\sum_{k=1}^{n} a_k M^k + a_0 I_n$.

1) Montrer que χ_M est une fonction polynomiale dont on calculera le degré.

2) Si $n = 2$, calculer χ_M puis $\chi_M(M)$.

3) Soit λ une racine de χ_M. Montrer qu'il existe un vecteur $X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ tel que $MX = \lambda X$.

4) En déduire que s'il existe $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$, n racines distinctes de χ_M, alors M est semblable à une matrice diagonale.

►Correction.

1) Montrer par récurrence sur la taille de M, que χ_M est une fonction polynomiale de degré n.
En effet, le résultat est trivial pour $n = 1$. Supposons que pour toute matrice N de taille inférieure à $(n-1)\times(n-1)$, χ_N est de degré $n-1$.
Alors soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, en développant selon la première colonne, on a

$\chi_M(x) = (m_{1,1} - x)\chi_{M_1}(x) + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1} m_{k,1}\chi_{M_k}(x)$, où M_k désigne la matrice $M - xI_n$ dont on a enlevé la ligne k.

On a $\deg \chi_{M_1} = n-1$ par hypothèse de récurrence et on voit facilement que $\deg \chi_{M_k} \leqslant n-1$. Donc $\deg \chi_M = n$. Le résultat est prouvé par récurrence.

2) Si $n = 2$, on a $\chi_M(x) = \begin{vmatrix} m_{1,1} - x & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} - x\end{vmatrix} = (m_{1,1} - x)(m_{2,2} - x) - m_{1,2}m_{2,1} = x^2 - (\mathrm{Tr} M)x + \det M$. Un simple calcul prouve que $\chi_M(M) = 0$.

On rappelle que si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme et M est une matrice alors P(M) désigne la matrice $\sum_{k=0}^{p} a_k M^k$.

Remarque — En fait cela est vrai en dimension quelconque. Et cela n'est pas trivial : la substitution de x par M sous la forme $\det(M - xI_n)$ n'a aucun sens. On ne peut PAS écrire $\det(M - xI_n)(M) = \det(M - MI_n) = 0$... (réfléchir pourquoi).

3) Soit λ une racine de χ_M. Alors $\det(M-\lambda I_n)=0$, donc la matrice $M-\lambda I_n$ représente dans une certaine base un endomorphisme non inversible. Or, on est en dimension finie où la dimension de l'espace de départ est la dimension de l'espace d'arrivée, donc elle représente un endomorphisme non injectif.
Il existe donc $X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX=\lambda X$.

4) Choisissons $\{X_1,\dots,X_n\}$, une famille de n vecteurs non nuls tels que $MX_p=\lambda_p X_p$ pour tout $p \in \{1,\dots,n\}$.

Il est clair que M est diagonale dans cette base : plus précisément il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$.

Montrons que $\{X_1,\dots,X_n\}$ est une base. Il suffit de montrer que c'est une famille libre, par exemple par récurrence sur n.
En effet, le résultat est clair dans le cas $n=1$. Supposons-le vrai au rang n.
Alors soient $\mu_1,\dots,\mu_n$ des constantes telles que $\sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i=0$, alors en appliquant M on obtient $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i X_i = A0 = 0$. Par ailleurs on a $\sum_{i=1}^{n}\lambda_n\mu_i X_i = 0$.
Faisant la différence des deux, on annule le dernier terme : $\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_n-\lambda_i)\mu_i X_i = 0$. Les constantes λ_i étant distinctes, on a par hypothèse de récurrence $\mu_i=0$ pour tout $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Mais donc $\mu_n X_n = 0$ et comme $X_n \neq 0$, on a aussi $\mu_n=0$. Bref, la liberté de la famille.

Exercice 163

Soit E un espace vectoriel de dimension impaire.

1) Montrer qu'il n'existe aucune application $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2=-\mathrm{Id}_E$. Que dire dans le cas de la dimension paire ?

2) Soit $x \in \mathbf{R}$ et $M \in \mathcal{M}_{\dim E}(\mathbf{R})$. On définit $\chi_M(x)=\det(M-xI_n)$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $\chi_M(x)=0$

►Correction.

1) Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2=-\mathrm{Id}_E$. Alors $(\det f)^2 = (-1)^{\dim E} = -1$. Ce qui est clairement absurde.
Si la dimension est paire, alors $\det f = \pm 1$.

2) Montrons que χ_M est une fonction polynomiale en x de degré $\dim E$.
En effet, le résultat est clair pour $\dim E = 1$. Supposons que pour toute matrice N de taille $\leqslant (\dim E-1)\times(\dim E-1)$, χ_N est de degré $\dim E - 1$.
Alors soit $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant \dim E} \in \mathcal{M}_{\dim E}(\mathbf{R})$, en développant selon la première colonne, on a
$\chi_M(x) = (m_{1,1}-x)\chi_{M_1}(x) + \sum_{k=2}^{\dim E}(-1)^{k+1}m_{k,1}\chi_{M_k}(x)$, où M_k désigne la matrice $M-xI_n$ dont on a enlevé la ligne k.
On a $\deg\chi_{M_1} = \dim E - 1$ par hypothèse de récurrence et on voit clairement que $\deg\chi_{M_k} \leqslant \dim E - 1$ (à montrer aussi par récurrence si on veut être complet). Donc $\deg\chi_M = \dim E$.
Reprenons le cadre de l'exercice : ici $\dim E$ est impair, et la fonction $x \longmapsto \chi_m(x)$ est donc une fonction polynomiale de degré impair. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois (χ_M est une fonction continue, et $\lim_{x\to\pm\infty}\chi_M(x)=\mp\infty$).

Exercice 164

1) Soient $a,b,c \in \mathbf{R}$. Quel est le coefficient de $a^2b^5c^3$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?

2) Soient $(p,n) \in \mathbf{N}^2$, $(a_1,\dots,a_p) \in \mathbf{R}^p$ et $(k_1,\dots,k_p) \in \mathbf{N}$.
Même question avec $a_1^{k_1}\dots a_p^{k_p}$ dans $(a_1+\dots+a_p)^n$.

►Correction.

1) Il y a $\binom{10}{2}$ choix pour les facteurs dont seront issus les a, ensuite $\binom{8}{2}$ pour les b. Et c'est tout, les c sont automatiquement choisis dans les facteurs restants.
D'où $\binom{10}{2}\times\binom{8}{2} = 2520$.

2) De la même manière, on a $\dfrac{n!}{k_1!\dots k_p!}$ choix dans le cas général si $k_1+\dots+k_n=n$ et 0 sinon.

Exercice 165

Soient $A_1,\dots,A_n$ des évènements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathbf{P})$.

Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)\right)$.

►Correction.
On souhaite donc majorer la probabilité $\mathbf{P}(A_1^c\cap\dots\cap A_n^c)$. Comme $A_1,\dots,A_n$ sont indépendants, les évènements $A_1^c,\dots,A_n^c$ le sont aussi (pour le voir : commencer avec $n=2$ et cela s'étend ensuite par réccurence).
Donc : $\mathbf{P}(A_1^c\cap\dots\cap A_n^c) = \prod_{k=1}^{n}(1-\mathbf{P}(A_k))$. Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $1-x \leqslant e^{-x}$.
L'inégalité découle alors en faisant le produit puisque tous les termes sont positifs.

Exercice 166

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices supposées semblables sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1) Montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pour lesquelles la matrice $U + iV$ est inversible et pour lesquelles : $AU = UB, \quad AV = VB$.

2) Montrer que $x \in \mathbf{R} \longmapsto \det(U + xV) \in \mathbf{R}$ est polynomiale et non nulle.

3) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

►Correction.

1) Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Il existe d'autre part $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $P = U + iV$ soit inversible. Mais comme $PB = AP$ on a $UB + iVB = AU + iAV$. On peut alors identifier : plus précisément on identifie parties réelles et imaginaires de chacun des coefficients.
On a alors : $AU = UB$ et $AV = VB$.

2) Notons $F(x) = \det(U + xV)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Il est clair que F est une fonction polynomiale pour $n = 1$: elle est même affine.
Supposons que le résultat est vrai pour des matrices de format inférieur à $(n-1) \times (n-1)$. Soient $U = (u_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, V = (v_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
On a
$F(x) = \begin{vmatrix} u_{11} + xv_{11} & u_{12} + xv_{12} & \dots & u_{1n} + xv_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{n1} + xv_{n1} & u_{n2} + xv_{n2} & & u_{nn} + xv_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}(u_{k1} + xv_{k1})P_k(x)$ où P_k est par hypothèse de récurrence une fonction polynomiale de $\mathbf{R}[X]$.
Si F est identiquement nulle sur $\mathbf{R}$, alors F possèderait une infinité de racines donc serait identiquement nul sur $\mathbf{C}$ également. Or, il ne s'annule pas en i – contradiction.

3) Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $F(\lambda) \neq 0$. Autrement dit la matrice $P_\lambda = U + \lambda V \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ et fournit une relation de similitude sur $\mathbf{R}$: $\quad B = P_\lambda^{-1}AP_\lambda$.
En effet : $P_\lambda B = (U + \lambda V)B = AU + \lambda AV = A(U + \lambda V)$ d'après la question **1)**.

Exercice 167

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^n}$.

1) Calculer u_0, u_1 et u_2.

2) Montrer que : $\quad u_n \underset{n\to\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

►Correction.

1) $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \ln 2$ et $u_2 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

2) Calculons $u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\quad u_n - 1 = -\displaystyle\int_0^1 t\frac{t^{n-1}}{1 + t^n}\,dt = \frac{1}{n}\left[\ln(1 + t^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\left[t\frac{1}{1 + t^n}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{2n}$ en faisant une intégration par parties puisque les fonctions $t \in [0, 1] \longmapsto t$ et $t \in [0, 1] \longmapsto \ln(1 + t^n)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient immédiatement le développement limité demandé.

Exercice 168

Soient $n \in \mathbf{N}$, $A, B \in \mathbf{K}_n[X]$ deux polynômes premiers entre eux non constants.

Montrer que $\left(A^k B^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

►Correction.

Comme $\dim \mathbf{K}_n[X] = n + 1$, il suffit de démontrer que la famille $\left(A^k B^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

Soit donc $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k B^{n-k} = 0$. Alors $B\left(\lambda_0 B^{n-1} + ... + \lambda_{n-1}A^{n-1}\right) = -A^n\lambda_n$, donc $B \mid -A^n\lambda_n$, d'après le lemme de Gauss on a B constant si $\lambda_n \neq 0$. Ceci étant exclu, nécessairement $\lambda_n = 0$.
Ensuite, après avoir simplifié par B une fois (on rappelle que $\mathbf{K}_n[X]$ est intègre et que B ne peut être nul), on recommence :
$B\left(\lambda_0 B^{n-2} + ... + \lambda_{n-2}A^{n-2}\right) = -A^{n-1}\lambda_{n-1}$. D'après le lemme de Gauss, $\lambda_{n-1} = 0$. Au final on a $B(\lambda_0 B^2) = -\lambda_1 A$ soit $\lambda_1 = 0$ et enfin $\lambda_0 = 0$.

Exercice 169

Soient A, B deux évènements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$.
Les évènements A^c et B^c sont-ils indépendants ?

►Correction.

On calcule $\mathbf{P}(A^c \cap B^c)$. D'après la formule de Morgan, $\mathbf{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B) = 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \cap B)$.
On en déduit alors par indépendance de A et B que : $\quad \mathbf{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = (1 - \mathbf{P}(A))(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A^c)\mathbf{P}(B^c)$, et ainsi l'indépendance de A^c et B^c.

Exercice 170

On dispose de 3 dés équilibrés et 2 dés truqués, dont la probabilité d'obtenir 6 vaut $\frac{1}{2}$. On choisit l'un des dés au hasard, on le lance, et justement on obtient 6. Avec quelle probabilité ce dé est-il équilibré ?

►Correction.
Notons E l'évènement « le dé lancé est équilibré » et S l'évènement « on fait 6 ». On utilise simplement les formules des probabilités totales pour faire apparaitre les probabilités connues dans l'énoncé.
Alors on souhaite calculer $\mathbf{P}(E \mid S) = \dfrac{\mathbf{P}(E\cap S)}{\mathbf{P}(S)} = \dfrac{\mathbf{P}(S \mid E)\mathbf{P}(E)}{\mathbf{P}(S \mid E)\mathbf{P}(E)+\mathbf{P}(S \mid E^c)\mathbf{P}(E^c)} = \dfrac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 171

Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A_1, ..., A_n$, n évènements non négligeables et $P = (P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \big(P(A_j \mid A_i)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
On suppose la famille d'évènements *Markovienne* : $\forall i \in \{1,...,n\},\quad \mathbf{P}(A_i \mid A_1\cap ...\cap A_{i-1}) = P_{i-1,i}$.

1) Donner une condition suffisante pour que P soit *stochastique* ; *i.e.*que $P \in \mathcal{M}_n([0,1])$ et que la somme des coefficients sur chaque ligne soit égale à un. Calculer Tr(P).

2) Exprimer $P(A_1\cap ...\cap A_n)$ en fonction des coefficients de la matrice P.

3) Montrer que si $B_1, ..., B_n$ sont des évènements indépendants alors la famille $(B_1, ..., B_n)$ est Markovienne. Que signifie la question **2)** dans ce cas ?

►Correction.

1) Les coefficients sont clairement dans $[0,1]$.
La somme sur la ligne i de la matrice P est : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j \mid A_i) = \sum_{j=1}^{n}\frac{P(A_j\cap A_i)}{\mathbf{P}(A_i)}$.
Supposons que $(A_1, ..., A_n)$ est un système complet d'évènements, alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j \mid A_i) = \frac{\mathbf{P}(A_i)}{\mathbf{P}(A_i)} = 1$. Dans la suite on supposera donc que c'est le cas. On constate facilement que $P_{i,i} = 1$ pour tout entier i donc $\mathrm{Tr}(P) = n$.

2) $P(A_1\cap...\cap A_n) = \mathbf{P}(A_n \mid A_1\cap...\cap A_{n-1})\mathbf{P}(A_1\cap...\cap A_{n-1})$ par définition de la probabilité conditionnelle. Comme la famille d'évènements est Markovienne, on a : $P(A_1\cap...\cap A_n) = P_{n-1,n}\mathbf{P}(A_1\cap...\cap A_{n-1})$. Ensuite on recommence, par récurrence on a donc $P(A_1\cap...\cap A_n) = P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}....P_{1,2}P_{1,1}$.

3) Si $B_1, ..., B_n$ sont indépendants alors par définition $P(B_1\cap\ldots\cap B_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(B_k)$. Et :
$$\forall i \in \{1,...,n\},\quad \mathbf{P}(B_i \mid B_1\cap...\cap B_{i-1}) = \frac{\mathbf{P}(B_1\cap...\cap B_{i-1}\cap B_i)}{\mathbf{P}(B_1\cap...\cap B_{i-1})} = \frac{\prod_{k=1}^{i}\mathbf{P}(B_k)}{\prod_{k=1}^{i-1}\mathbf{P}(B_k)} = \mathbf{P}(B_i) = \frac{\mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(B_{i-1})}{\mathbf{P}(B_{i-1})} = \frac{\mathbf{P}(B_i\cap B_{i-1})}{\mathbf{P}(B_{i-1})} = \mathbf{P}(B_i \mid B_{i-1}).$$
La formule précédente devient alors simplement l'égalité : $\mathbf{P}(B_1\cap...\cap B_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(B_k)$ puisque pour tout $k\in\{1,...,n\}$, $P_{k-1,k} = \mathbf{P}(A_k)$ dans le cas indépendant.

Exercice 172

On pose pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $\quad \varphi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{-x}^{x}\cos(t^2+t)\,dt$.

1) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ et calculer sa dérivée.

2) Montrer que φ est prolongeable par continuité en zéro.

►Correction.

1) La fonction φ est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ en tant que fonctions dérivables. Notamment le numérateur est, pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$:
$\displaystyle\int_{-x}^{x}\cos(t^2+t)\,dt = \int_{0}^{x}\cos(t^2+t)\,dt + \int_{-x}^{0}\cos(t^2+t)\,dt = \int_{0}^{x}\cos(t^2+t)\,dt + \int_{0}^{x}\cos(t^2-t)\,dt$ en faisant un changement de variable.
D'après le cours, la dérivée est alors
$\left(\displaystyle\int_{-\cdot}^{\cdot}\cos(t^2+t)\,dt\right)'(x) = \cos(x^2+x)+\cos(x^2-x)$.
Ainsi $\varphi'(x) = \dfrac{(\cos(x^2+x)+\cos(x^2-x))x - \int_{-x}^{x}\cos(t^2+t)\,dt}{x^2} = \cos(x^2+x)+\cos(x^2-x) - \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

2) Soit F une primitive de $\Psi : t \longmapsto \cos(t^2+t)$. Alors $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}(F(x)-F(-x))$.
Donc comme φ est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$, elle est en particulier continue sur ce même ensemble. Il suffit de montrer qu'elle a une limite finie en zero. En effet :
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(F(x)-F(-x)) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-0}(F(x)-F(0)) + \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-0}(F(x)-F(0)) = 2\Psi(0) = 2$. On peut donc prolonger φ par continuité en zero.

Exercice 173

Soient $n \in \mathbf{N}\setminus\{0,1\}$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose $A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
Calculer $A\overline{A}$ et en déduire que A est inversible. Calculer A^{-1}.

►Correction.
Par définition du produit matriciel on a :
$\left(A\overline{A}\right)_{k,l} = \sum_{i=1}^{n} A_{k,i}\overline{A_{i,l}} = \sum_{i=1}^{n} \omega^{(k-1)(i-1)}\omega^{-(i-1)(l-1)} = \sum_{i=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-l)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\omega^{k-l}\right)^{i-1} = \dfrac{1-\omega^{n(k-l)}}{1-\omega^{k-l}} = 0$ si $k \neq l$.
Si $k = l$, alors $\left(A\overline{A}\right)_{k,l} = n$. Moralité de l'histoire, la matrice $A\overline{A}$ est égale à nI_n. Donc A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{n}\overline{A}$.

Exercice 174

Soient A, B deux évènements d'un univers fini Ω vérifiant

$$A \cap B \neq \emptyset, A \cap B^c \neq \emptyset, A^c \cap B \neq \emptyset, A^c \cap B^c \neq \emptyset.$$

1) Déterminer une condition sur $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in]0,1[^4$ pour qu'il existe une probabilité $\mathbf{Q}$ sur Ω vérifiant $\mathbf{Q}(A \cap B) = \alpha, \mathbf{Q}(A \cap B^c) = \beta, \mathbf{Q}(A^c \cap B) = \gamma$ et $\mathbf{Q}(A^c \cap B^c) = \delta$.

2) En déduire une condition sur $(a, b, c, d) \in]0,1[^4$ pour qu'il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω vérifiant $\mathbf{P}(A \mid B) = a, \mathbf{P}(A \mid B^c) = b, \mathbf{P}(B \mid A) = c$ et $\mathbf{P}(B \mid A^c) = d$.

►Correction.

1) Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbf{R}^+)^4$ satisfaisant $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$. On sait qu'il existe une unique probabilité $\mathbf{Q}$ telle que $\mathbf{Q}(A \cap B) = \alpha$, $\mathbf{Q}(A \cap B^c) = \beta$, $\mathbf{Q}(A^c \cap B) = \gamma$, $\mathbf{Q}(A^c \cap B^c) = \delta$. En effet : pour tout $C \in \mathcal{P}(\Omega)$, on définit :

$$\mathbf{Q}(C) = \sum_{\omega \in C} P(\{\omega\}) \text{ avec } \mathbf{Q}(\{\omega\}) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \omega \in A \cap B \\ \beta & \text{si } \omega \in A \cap B^c \\ \gamma & \text{si } \omega \in A^c \cap B \\ \delta & \text{si } \omega \in A^c \cap B^c \end{cases}.$$

On vérifie très facilement que $\mathbf{Q}$ est une probabilité vérifiant $\mathbf{Q}(A \cap B) = \alpha$, $\mathbf{Q}(A \cap B^c) = \beta$, $\mathbf{Q}(A^c \cap B) = \gamma$, $\mathbf{Q}(A^c \cap B^c) = \delta$.
Inversement, pour toute probabilité $\mathbf{Q}$ sur Ω, avec A, B, C, D quatre évènements fixés comme dans l'énoncé, les quantités $\mathbf{Q}(A \cap B) = \alpha$, $\mathbf{Q}(A \cap B^c) = \beta$, $\mathbf{Q}(A^c \cap B) = \gamma$, $\mathbf{Q}(A^c \cap B^c) = \delta$ sont positives et vérifient $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ (le système $\{A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c\}$ est un système complet d'évènements).

2) Supposons que $\mathbf{P}$ vérifie les conditions de l'énoncé et notons $\mathbf{P}(A \cap B) = \alpha$, $\mathbf{P}(A \cap B^c) = \beta$, $\mathbf{P}(A^c \cap B) = \gamma$, $\mathbf{P}(A^c \cap B^c) = \delta$.
Alors $\mathbf{P}(A) = \alpha + \beta$ et $\mathbf{P}(B) = \alpha + \gamma$. Donc $\mathbf{P}(A \mid B) = a$ si et seulement si $\alpha = a(\alpha + \gamma)$.
De-même les trois autres conditions donnent :

$$\beta = b(1 - \alpha - \gamma), \quad \alpha = c(\alpha + \beta), \quad \gamma = d(1 - \alpha - \beta).$$

Finalement le système obtenu est : $\begin{cases} \alpha & = a(\alpha + \gamma) \\ \beta & = b(1 - \alpha - \gamma) \\ \alpha & = c(\alpha + \beta) \\ \gamma & = d(1 - \alpha - \beta) \end{cases}$.

Il suffit de trouver une condition sur $(a, b, c, d) \in]0,1[^4$ pour avoir l'existence d'une solution en $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbf{R}^+)^4$ au système précédent. Puisque si une solution existe il suffit alors de considérer $\mathbf{P}$ comme en question **1)** (associée au quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbf{R}^+)^4$), qui vérifiera alors automatiquement les conditions de la question **2)**.

Le système se réecrit : $\begin{cases} \alpha & = \dfrac{a}{1-a}\gamma \\ \beta & = \dfrac{(1-c)a}{(1-a)c}\gamma \\ \left(\dfrac{ab}{1-a} + b + \dfrac{(1-c)a}{(1-a)c}\right)\gamma & = b \\ \left(1 + \dfrac{a}{1-a} + \dfrac{(1-c)a}{(1-a)c}\right)\gamma & = d \end{cases}$. Les quantités α et β s'expriment donc toutes deux en fonction de l'inconnue γ. Et si α, β, γ sont fixées alors la relation $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ (voir **1)**) fournit automatiquement l'inconnue δ.

Il suffit donc de regarder quand les deux dernières lignes du système sont compatibles. En multipliant la ligne 3 par $\left(1 + \dfrac{a}{1-a} + \dfrac{(1-c)a}{(1-a)c}\right)$ on trouve comme condition :

$$d\left(\frac{ab}{1-a} + b + \frac{(1-c)a}{(1-a)c}\right) = b\left(1 + \frac{a}{1-a} + \frac{(1-c)a}{(1-a)c}\right).$$