





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Courbes paramétrées</b>	<b>5</b>
1.1	Premières notions sur les courbes paramétrées . . . . .	5
1.1.1	Définitions . . . . .	5
1.1.2	Premiers exemples . . . . .	6
1.1.3	Représentations paramétriques de courbes usuelles . . . . .	7
1.2	Etude d'une courbe paramétrée . . . . .	8
1.2.1	Domaine de définition . . . . .	8
1.2.2	Réduction du domaine d'étude . . . . .	8
1.2.3	Variations de la courbe . . . . .	11
1.2.4	Etude des branches infinies . . . . .	12
1.3	Etude locale . . . . .	16
1.3.1	Vecteur tangent . . . . .	16
1.3.2	Etude locale en un point singulier . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Courbes en coordonnées polaires</b>	<b>21</b>
2.1	Définitions . . . . .	21
2.2	Premiers exemples . . . . .	22
2.3	Etude d'une courbe en coordonnées polaires . . . . .	23
2.3.1	Réduction du domaine d'étude . . . . .	23
2.3.2	Etude des variations . . . . .	26
2.3.3	Exemple d'étude . . . . .	27
2.3.4	Branches infinies . . . . .	28
2.4	Etude locale . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Aspect métrique des courbes</b>	<b>33</b>
3.1	Longueur d'un arc . . . . .	33
3.1.1	Ligne polygonale et longueur d'arc . . . . .	33
3.1.2	Abscisse curviligne . . . . .	34
3.2	Représentation paramétrique par l'abscisse curviligne . . . . .	37
3.2.1	Paramétrage par l'abscisse curviligne . . . . .	37
3.2.2	Repère de Frénet . . . . .	37



# Chapitre 1

## Courbes paramétrées

Dans la suite,  $I$  désigne un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  (un intervalle de  $\mathbb{R}$  ou une réunion d'intervalles). On munit  $\mathbb{R}^2$  d'un repère orthonormé direct<sup>1</sup>  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### 1.1 Premières notions sur les courbes paramétrées

#### 1.1.1 Définitions

**Définition 1.1.1.** Soient  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  et  $g : I \mapsto \mathbb{R}$  et  $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^2$  l'application définie par

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in I.$$

Le couple  $(I, \gamma)$  est une **courbe paramétrée** du plan. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \gamma(I) = \{M(t) = (x, y) / (x, y) = (f(t), g(t)), t \in I\}$$

est le **support de la courbe paramétrée**. Le système d'équations

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

est appelé **représentation paramétrique (ou paramétrage)** de  $\mathcal{C}$ .

**Remarque 1.1.2.** • Une même courbe  $\mathcal{C}$  admet plusieurs paramétrages.

- L'application  $t \in I \mapsto M(t) = (f(t), g(t))$  est également appelée courbe paramétrée. Dans la pratique, la courbe paramétrée désignera l'application  $\gamma$ , l'application  $t \mapsto M(t)$  et le support  $\mathcal{C}$ .

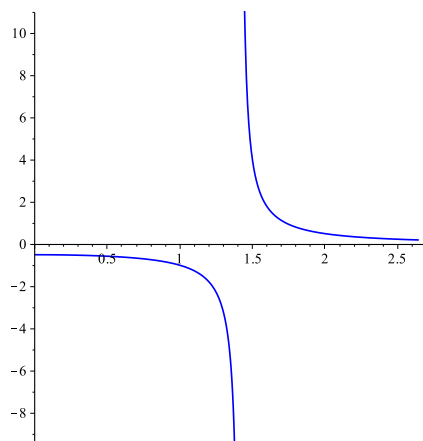
**Interprétation cinématique** : si le paramètre  $t$  représente le temps, la courbe paramétrée décrit un point en mouvement et le support de la courbe s'appelle la trajectoire de sorte que  $M(t)$  est la position du point  $M$  au temps  $t$ .

---

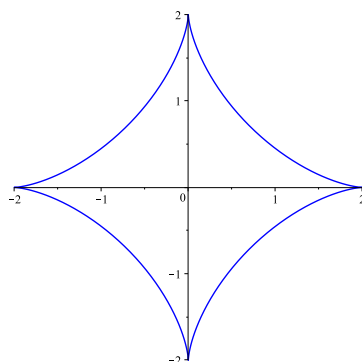
1. c'est-à-dire orienté dans le sens trigonométrique.

### 1.1.2 Premiers exemples

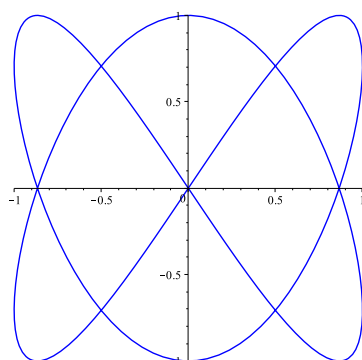
**Exemple 1.1.3.**  $\mathcal{C} \begin{cases} x = \sqrt{t+2} \\ y = 1/t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$



**Exemple 1.1.4.** *L'astroïde*  $\mathcal{C} \begin{cases} x = a \cos^3(t) \\ y = a \sin^3(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi[.$



**Exemple 1.1.5.** *Courbe de Lissajous*  $\mathcal{C} \begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi[.$



### 1.1.3 Représentations paramétriques de courbes usuelles

#### A - Représentation paramétrique d'une droite

Soit  $\mathcal{D}$  la droite du plan d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  avec  $a, b, c$  réels non nuls. Si on note  $\vec{u} = (-b, a)$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  et  $A\left(0, \frac{-c}{b}\right)$  un point de  $\mathcal{D}$ , alors une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$  est donnée par

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = -bt \\ y = at - \frac{c}{b} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

#### B - Représentation paramétrique d'un cercle

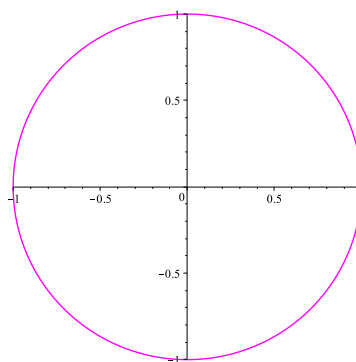
Une représentation paramétrique du cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  est

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi[.$$

est une autre représentation paramétrique du cercle  $\mathcal{C}(O, R)$ .

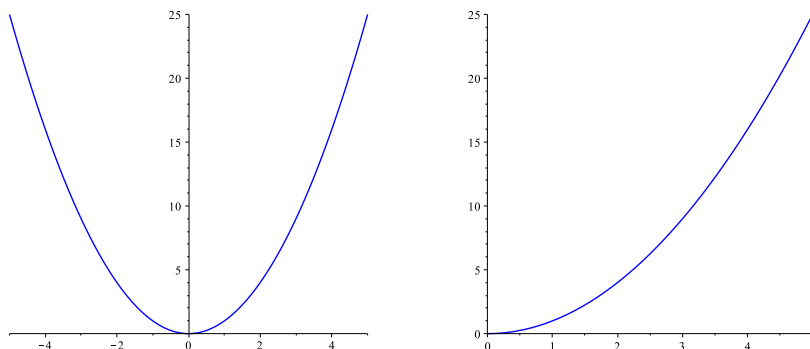


#### C - Représentation paramétrique de la courbe représentative d'une fonction

Pour toute fonction  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  où  $\mathcal{D}_f$  désigne le domaine de définition de  $f$ , la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  peut s'écrire sous forme paramétrée :

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, t \in \mathcal{D}_f.$$

**Exemple 1.1.6** (Représentation paramétrique de la parabole d'équation  $y = x^2$ ). La courbe  $\mathcal{C} \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  est la parabole d'équation  $y = x^2$ . Si on prend  $t \in [0, +\infty[$ , on a seulement la demi-parabole.



## 1.2 Etude d'une courbe paramétrée

### 1.2.1 Domaine de définition

**Définition 1.2.1.** Le domaine de définition d'une courbe paramétrée est l'ensemble

$$\mathcal{D}_{\mathcal{C}} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g,$$

où  $\mathcal{D}_f$  et  $\mathcal{D}_g$  désignent les domaines de définition des fonctions  $f$  et  $g$  respectivement.

**Remarque 1.2.2.** En d'autres termes, le domaine de définition d'une courbe paramétrée  $\mathcal{C}$  est l'ensemble maximum des valeurs du paramètre pour lesquelles on peut calculer  $x$  et  $y$  dans la représentation paramétrique de  $\mathcal{C}$ .

**Dans la pratique**, on commence par déterminer le domaine de définition de la courbe  $\mathcal{C}$  en le restreignant éventuellement si un intervalle  $I$  est spécifié au départ. Autrement dit, dans le cas où un domaine  $I$  est spécifié au départ, il faut alors calculer  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}} \cap I$ .

**Exemple 1.2.3.**  $\mathcal{C} \begin{cases} x = \sqrt{t+2} \\ y = 1/t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  est définie sur  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}} = [-2, +\infty[ \cap \mathbb{R}^* = [-2, 0[ \cup ]0, +\infty[$ .

### 1.2.2 Réduction du domaine d'étude

L'étape de réduction du domaine d'étude d'une courbe paramétrée consiste à exploiter géométriquement les propriétés des fonctions  $f$  et  $g$  afin d'étudier la courbe sur un domaine restreint  $\mathcal{D}_e \subset \mathcal{D}_{\mathcal{C}}$  et d'en simplifier ainsi l'étude.

#### A - Périodicité



**Définition 1.2.4.** La courbe  $\mathcal{C}$  admet une période s'il existe  $T > 0$  tel que pour tout  $t \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}}$

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{et} \quad g(t+T) = g(t). \quad (1.1)$$

La période de  $\mathcal{C}$  est le plus petit  $T > 0$  vérifiant (1.1).

**Remarque 1.2.5.** Si la courbe  $\mathcal{C}$  admet une période alors  $f$  et  $g$  sont des fonctions périodiques.

**Proposition 1.2.6.** Soient  $T_1$  et  $T_2$  les périodes respectives de  $f$  et  $g$ . Alors, la période  $T$  est le **plus petit commun multiple** de  $T_1$  et  $T_2$ , s'il existe :

$$T = \text{ppcm}(T_1, T_2) = n_1 T_1 = n_2 T_2 \quad \text{pour certains } n_1, n_2 \in \mathbb{N} \text{ les plus petits possibles.}$$

Condition d'existence :  $\text{ppcm}(T_1, T_2)$  existe si et seulement si  $T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$ .

**Exemple 1.2.7.**  $\mathcal{C} \begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \sin(3t) \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  est bien définie.

Puisque  $x$  est  $\pi$ -périodique et  $y$  est  $2\pi/3$ -périodique, la paramétrisation de  $\mathcal{C}$  est  $2\pi$ -périodique ( $2\pi = 3 \cdot (2\pi/3) = 2\pi$ ).

**Conséquences 1.2.8.** Si la courbe  $\mathcal{C}$  a  $T$  pour période alors, on peut restreindre l'étude de la courbe à un intervalle de longueur  $T$ . Par exemple, pour  $a > 0$ , on étudie la courbe sur  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}} \cap [a, a+T[$ . Dans la majorité des cas, on prendra  $a = 0$ . La courbe est entièrement décrite pour  $t \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}} \cap [a, a+T[$ .

## B - Parité des fonctions $f$ et $g$

Pour  $t \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ ,  $M(t)$  désigne le point de  $\mathcal{C}$  de coordonnées  $(f(t), g(t))$ . Le principe de la réduction du domaine d'étude est de chercher deux sous-intervalles  $I_1$  et  $I_2$  de  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$  tels que les points  $M(t_2) \in \mathcal{C}$  pour  $t_2 \in I_2$  se déduisent des points  $M(t_1) \in \mathcal{C}$  pour  $t_1 \in I_1$  par des transformations géométriques (symétries, rotations, translations).

Lorsque  $f$  et  $g$  ont une propriété de parité (paire ou impaire), on s'intéresse au point  $M(-t)$  et à sa position par rapport au point  $M(t)$ .

- Si  $f$  et  $g$  sont paires, alors

$$M(-t) = (f(-t), g(-t)) = (f(t), g(t)) = M(t).$$

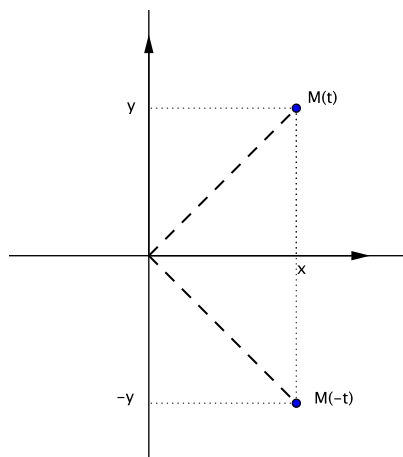
On peut donc restreindre l'étude de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}} \cap [0, +\infty[$ .

**Exemple 1.2.9.**  $\mathcal{C} \begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1} \\ y = \cos(t) \end{cases}$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus ]-1, 1[$  mais il suffit de la tracer pour  $t \in [1, +\infty[$ .

- Si  $f$  est paire et  $g$  est impaire, alors

$$M(-t) = (f(-t), g(-t)) = (f(t), -g(t)).$$

On en déduit que le point  $M(-t)$  est symétrique du point  $M(t)$  par rapport à l'axe  $(Ox)$  :

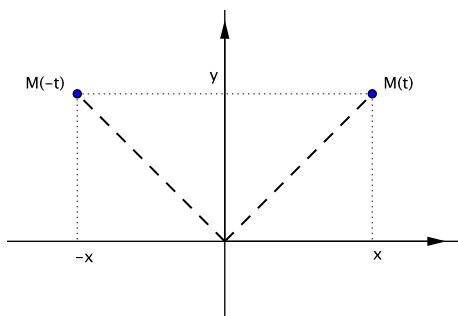


On réduit l'étude de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}} \cap [0, +\infty[$ . On en déduit le tracé de la courbe pour  $t \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}} \cap ]-\infty, 0[$  par symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$ .

- Si  $f$  est impaire et  $g$  est paire, alors

$$M(-t) = (f(-t), g(-t)) = (-f(t), g(t)).$$

On en déduit que le point  $M(-t)$  est symétrique du point  $M(t)$  par rapport à l'axe  $(Oy)$  :

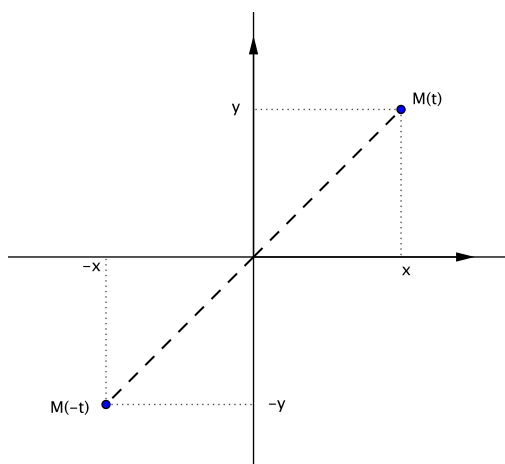


On réduit l'étude de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}} \cap [0, +\infty[$ . On en déduit le tracé de la courbe pour  $t \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}} \cap ]-\infty, 0[$  par symétrie par rapport à l'axe  $(Oy)$ .

- Si  $f$  et  $g$  sont impaires, alors

$$M(-t) = (f(-t), g(-t)) = (-f(t), -g(t)).$$

On en déduit que le point  $M(-t)$  est symétrique du point  $M(t)$  par rapport à l'origine du repère :



On réduit l'étude de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}} \cap [0, +\infty[$ . On en déduit le tracé de la courbe pour  $t \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}} \cap ]-\infty, 0[$  par symétrie par rapport à l'origine du repère.

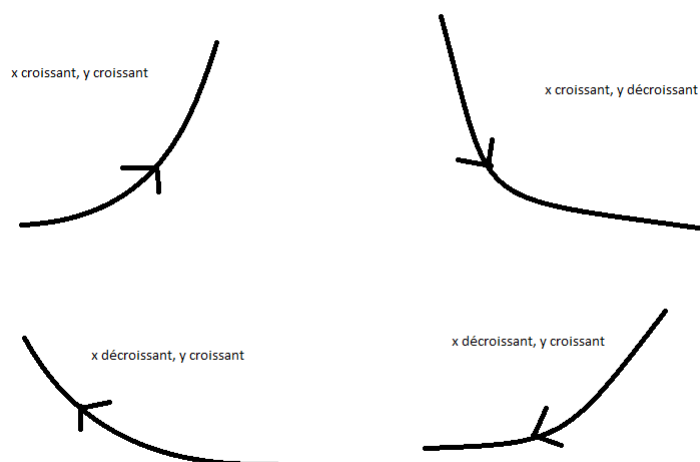
**Remarque 1.2.10.** *Etudier la position du point  $M(-t)$  par rapport au point  $M(t)$  revient à s'intéresser au point  $M(\phi(t))$  avec  $\phi(t) = -t$ . En TD, on s'intéressera à d'autres transformations  $\phi$  qui permettront de réduire le domaine d'étude.*

### 1.2.3 Variations de la courbe

Une fois le domaine d'étude réduit, on étudie les variations des fonctions  $f$  et  $g$  sur ce domaine  $\mathcal{D}_e$  que l'on donne dans **un tableau de variation** de la forme suivante :

$t$	$\mathcal{D}_e$
$x'$	signe
$x$	sens de variation
$y'$	signe
$y$	sens de variation

Les variations de  $f$  et  $g$  permettent de décrire graphiquement les variations de la courbe  $\mathcal{C}$ .



### 1.2.4 Etude des branches infinies

**Définition 1.2.11.** Soient  $t_0 \in I$  et  $\mathcal{C}$  la courbe paramétrée

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$$

On dit que  $\mathcal{C}$  admet une *branche infinie* en  $t_0$  si  $x$  ou  $y$  tend vers l'infini quand  $t \rightarrow t_0$ .

**Remarque 1.2.12.** Le point  $t_0$  est un réel ou  $t_0 = +\infty$  ou  $t_0 = -\infty$ .

**A** Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = b \in \mathbb{R}$ , alors la courbe  $\mathcal{C}$  admet la droite  $\Delta$  d'équation  $y = b$  comme **asymptote horizontale**.

**B** Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = \infty$ , alors la courbe  $\mathcal{C}$  admet la droite  $\Delta$  d'équation  $x = a$  comme **asymptote verticale**.

**C** Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = \infty$ , on calcule  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)}$ .

1- Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)} = \infty$ , alors  $\mathcal{C}$  admet **une branche parabolique** dans la direction  $(Oy)$  (ou de direction asymptotique  $(Oy)$ ).

2- Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)} = 0$ , alors  $\mathcal{C}$  admet **une branche parabolique** dans la direction  $(Ox)$  (ou de direction asymptotique  $(Ox)$ ).

3- Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)} = a \neq 0$ , on étudie  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) - a f(t)$ .

- a) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) - a f(t) = b \in \mathbb{R}$ , alors  $\mathcal{C}$  admet **une asymptote** d'équation  $y = ax + b$ .
- b) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) - a f(t) = \infty$ , alors  $\mathcal{C}$  admet **une branche parabolique** dans la direction de la droite d'équation  $y = ax$ .
- c) Si  $g(t) - a f(t)$  n'a pas de limite quand  $t$  tend vers  $t_0$ , on ne peut pas conclure.
- (a) Si  $\frac{g(t)}{f(t)}$  n'a pas de limite quand  $t$  tend vers  $t_0$ , on ne peut pas conclure.

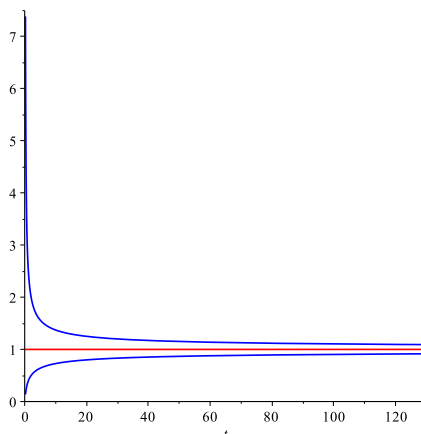
On illustre ci-dessous les différents types de branches infinies.

### A- Asymptote horizontale

**Exemple 1.2.13.** Soit la courbe

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = \frac{1}{t^2} \\ y = e^{-t} \end{cases}, t \in I$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 1$ ,  $\mathcal{C}$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 1$ .

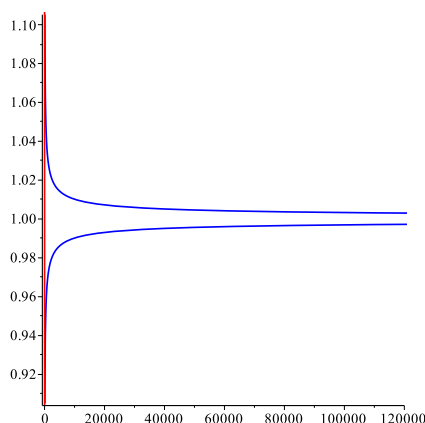


### B- Asymptote verticale

**Exemple 1.2.14.** Soit la courbe

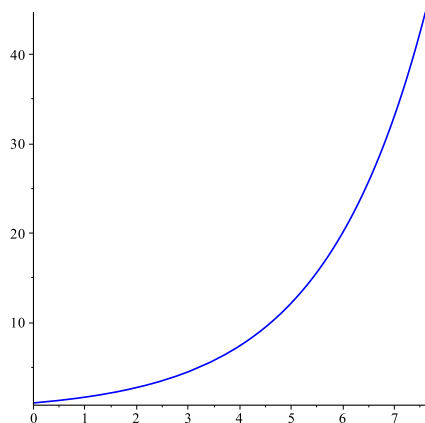
$$\mathcal{C} \begin{cases} x = \frac{1}{t^2} \\ y = e^{-t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = +\infty$ ,  $\mathcal{C}$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 0$ , c'est-à-dire l'axe des ordonnées.



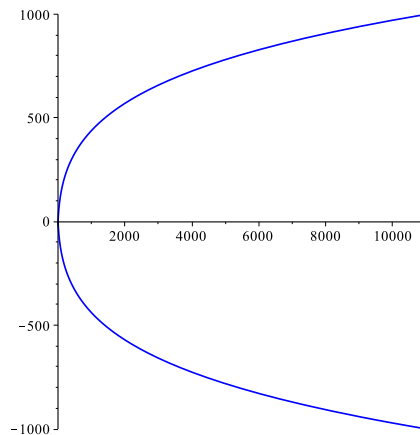
### C-1 Branche parabolique de direction asymptotique ( $Oy$ )

**Exemple 1.2.15.**  $\mathcal{C} \begin{cases} x = \ln(t) \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^*$  admet une branche parabolique de direction asymptotique ( $Oy$ ) quand  $t \rightarrow +\infty$ .



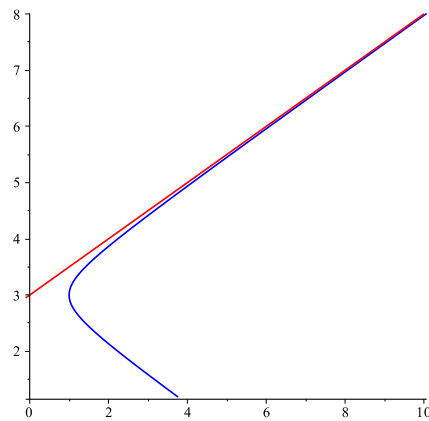
### C-2 Branche parabolique de direction asymptotique ( $Ox$ )

**Exemple 1.2.16.**  $\mathcal{C} \begin{cases} x = \text{ch}(t) \\ y = t^3 \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  admet une branche parabolique de direction asymptotique ( $Ox$ ) quand  $t \rightarrow +\infty$ .



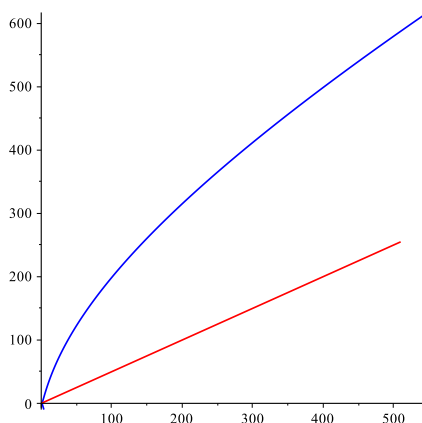
### C-3-a Droite asymptote

**Exemple 1.2.17.**  $\mathcal{C} \begin{cases} x = \text{ch}(t) \\ y = 3 + \text{sh}(t)/2 \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  admet la droite  $\Delta : y = x/2 + 3$  comme asymptote oblique.



### C-3-b Branche parabolique de direction asymptotique

**Exemple 1.2.18.**  $\mathcal{C} \begin{cases} x = \text{ch}(t) \\ y = t^3 + \text{sh}(t)/2 \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  admet une branche parabolique de direction asymptotique  $\Delta : y = x/2$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .



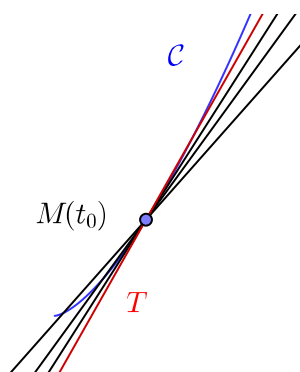
## 1.3 Etude locale

### 1.3.1 Vecteur tangent

**Définition 1.3.1.** Soient  $\mathcal{C}$  la courbe paramétrée

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$$

et un point  $M_0 = M(t_0) \in \mathcal{C}$  pour  $t_0 \in I$ . On dit que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une tangente en  $M_0$  si la droite  $(M_0M(t))$  (où  $M(t) \in \mathcal{C}$ ) a une position limite quand  $t \rightarrow t_0$ . Dans ce cas, la droite limite s'appelle la tangente à la courbe en  $M(t_0)$ .



Supposons que la courbe admette une tangente en  $M_0 = M(t_0) \in \mathcal{C}$ . On cherche une expression de la tangente à la courbe en  $M(t_0)$ . Soit  $t \in I$ . Un vecteur directeur de la droite  $(M_0M(t))$  est

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix}.$$

Pour  $t \neq t_0$ , le vecteur



$$\frac{1}{t-t_0} \overrightarrow{M_0 M(t)} = \begin{pmatrix} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \\ \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \end{pmatrix}$$

est également un vecteur directeur de la tangente en  $M_0$ . Si  $x$  et  $y$  sont dérivables en  $t_0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t-t_0} \overrightarrow{M_0 M} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}.$$

**Définition 1.3.2** (Vecteur dérivé). Soient  $\mathcal{C}$  la courbe paramétrée

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$$

et un point  $M_0 = M(t_0) \in \mathcal{C}$  pour  $t_0 \in I$ . Si  $x$  et  $y$  sont dérivables sur  $I$  alors le vecteur

$$\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$$

s'appelle le vecteur dérivé en  $M(t_0)$  noté  $\frac{dM}{dt}(t_0)$ .

**Définition 1.3.3.** Points réguliers et points singuliers Soit  $\mathcal{C}$  la courbe paramétrée

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$$

et un point  $M_0 = M(t_0) \in \mathcal{C}$ . On dit que  $M(t_0)$  est un **point régulier** si  $\frac{dM}{dt}(t_0) \neq 0$ .

On dit que  $M(t_0)$  est un **point singulier** si  $\frac{dM}{dt}(t_0) = 0$ .

**Interprétation cinématique** : si le paramètre  $t$  représente le temps, le vecteur dérivé  $\frac{dM}{dt}(t_0)$  est le vecteur vitesse au point  $M(t_0)$ . Un point singulier est un point en lequel la vitesse est nulle; on l'appelle point stationnaire.

**Proposition 1.3.4.** Soit  $M(t_0) \in \mathcal{C}$ . Si  $M(t_0)$  est un point régulier, alors la courbe paramétrée admet une tangente en  $M(t_0)$ . La tangente a pour équation

$$y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

Le vecteur tangent à la courbe en  $M(t_0)$  noté  $\vec{T}(t_0)$  est le vecteur dérivé en  $t_0$

$$\vec{T}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}.$$

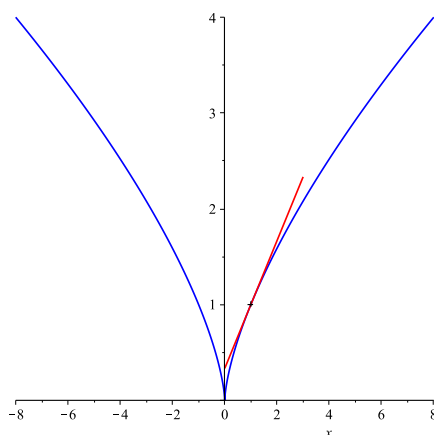
**Remarque 1.3.5.** • Si  $x' = 0$  et  $y' \neq 0$ , la tangente est verticale.

• Si  $x' \neq 0$  et  $y' = 0$ , la tangente est horizontale.

**Exemple 1.3.6.** On considère la courbe

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Donc  $x' = 3t^2$  et  $y' = 2t$ . Pour tout point  $M_0(t_0^3, t_0^2)$  avec  $t_0 \neq 0$ , on a  $\vec{T}(t_0) = (3t_0^2, 2t_0) \neq (0, 0)$  :  $M_0$  est régulier. Par exemple pour  $t_0 = 1$ ,  $\vec{T}(1) = (3, 2)$  est le vecteur tangent à  $\mathcal{C}$  en  $M_0(1, 1)$ . Par contre, en  $M_0 = O(0, 0)$  pour  $t = 0$ , on a  $(x', y') = (0, 0)$  : il s'agit d'un point singulier.



### 1.3.2 Etude locale en un point singulier

On s'intéresse au comportement local de la courbe au voisinage d'un point singulier. Soit  $t_0 \in I$ . On note  $M_0 = M(t_0)$  le point de la courbe paramétrée pour  $t = t_0$ . Pour décrire ce comportement local, on fait appel aux développements limités de fonctions coordonnées  $x$  et  $y$ . On pourra alors classer les différents types de points possibles donnant lieu à différents comportements de la courbe au voisinage du point singulier.

Soit  $M$  le point de la courbe paramétrée de paramètre  $t$ . Dans la suite, on suppose que  $x$  et  $y$  sont  $n$  fois dérivables au voisinage de  $t_0$ . On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) + (t - t_0)x'(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}x^{(n)}(t_0) \\ y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}y^{(n)}(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + (t - t_0) \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} + \dots + \frac{(t - t_0)^n}{n!} \begin{pmatrix} x^{(n)}(t_0) \\ y^{(n)}(t_0) \end{pmatrix} + (t - t_0)^n \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En notant  $\vec{T}^{(k)} = (x^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_0))$  pour  $k = 1, \dots, n$ , on obtient

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + (t - t_0)\overrightarrow{T}^{(1)} + \dots + \frac{(t - t_0)^n}{n!}\overrightarrow{T}^{(n)} + (t - t_0)^n\overrightarrow{\varepsilon}(t),$$

où  $\overrightarrow{\varepsilon}(t) = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow t_0$ .

**Définition 1.3.7.** On définit les **vecteurs dérivés successifs** pour tout  $k = 1, \dots, n$ , par  $\overrightarrow{T}^{(k)}(t_0) = (x^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_0))$ . Plus généralement, dans le cas où  $x$  et  $y$  admettent des DL à l'ordre  $n$  en  $t_0$ , on posera  $\overrightarrow{T}^{(k)}(t_0) = (a_k, b_k)$  pour tout  $k = 1, \dots, n$  où  $a_k = x^{(k)}(t_0)$  et  $b_k = y^{(k)}(t_0)$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$  le plus petit entier possible (s'il existe) tel que  $\overrightarrow{T}^{(p)}(t_0) \neq (0, 0)$ .

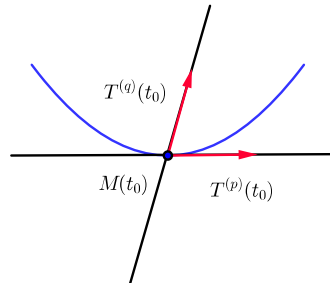
**Proposition 1.3.8.** Dans le cas où un des vecteur dérivés successifs  $\overrightarrow{T}^{(k)}(t_0)$  est non nul, alors  $\mathcal{C}$  admet une tangente au point  $M_0$ . De plus, cette tangente admet pour vecteur directeur le vecteur  $\overrightarrow{T}^{(p)}(t_0)$ .

Soit  $q$  le plus petit possible (s'il existe) tel que  $\overrightarrow{T}^{(q)}(t_0)$  **n'est pas colinéaire** à  $\overrightarrow{T}^{(p)}(t_0)$ . En particulier  $\overrightarrow{T}^{(q)}(t_0)$  est aussi non nul. On peut alors écrire que :

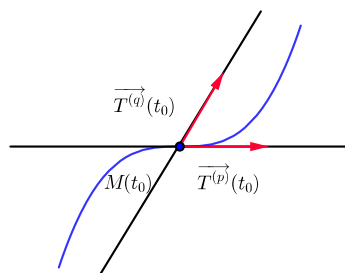
$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= \frac{(t - t_0)^p}{p!}\overrightarrow{T}^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^{p+1}}{(p+1)!}\overrightarrow{T}^{(p+1)}(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^q}{q!}\overrightarrow{T}^{(q)}(t_0) + (t - t_0)^q\overrightarrow{\varepsilon}(t) \\ &= (t - t_0)^p\overrightarrow{T}^{(p)}(t_0) \left[ \frac{1}{p!} + \frac{t - t_0}{(p+1)!}\lambda_1 + \dots + \frac{(t - t_0)^{q-p+1}}{(p+1)!}\lambda_{q-p-1} \right] \\ &\quad + \frac{(t - t_0)^q}{q!}\overrightarrow{T}^{(q)}(t_0) + (t - t_0)^q\overrightarrow{\varepsilon}(t). \end{aligned}$$

Selon la parité de  $p$  et  $q$ , 4 cas sont possibles :

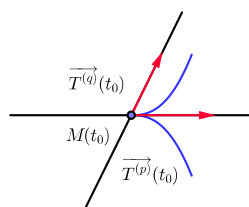
- **$p$  impair,  $q$  pair** :  $\mathcal{C}$  est d'un seul côté de la tangente, celui indiqué par le sens de  $\overrightarrow{T}^{(q)}(t_0)$ , et elle traverse  $\overrightarrow{T}^{(q)}(t_0)$  (pas de changement de signe pour  $\overrightarrow{T}^{(q)}(t_0)$  mais changement de signe pour  $\overrightarrow{T}^{(p)}(t_0)$ ). On a un **point ordinaire**.



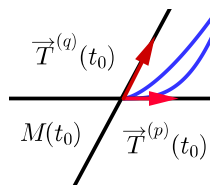
- **$p$  impair,  $q$  impair** :  $\mathcal{C}$  traverse sa tangente  $\overrightarrow{T}^{(p)}(t_0)$  et le vecteur  $\overrightarrow{T}^{(q)}(t_0)$  (changement de signe pour les deux). On a un **point d'inflexion**.



- $p$  pair,  $q$  impair :  $\mathcal{C}$  traverse aussi sa tangente  $\vec{T}^{(p)}(t_0)$  mais pas le vecteur  $\vec{T}^{(q)}(t_0)$  (pas de changement de signe pour  $\vec{T}^{(p)}(t_0)$  mais changement de signe pour  $\vec{T}^{(q)}(t_0)$ ). On a un **point de rebroussement de 1ère espèce**.



- $p$  pair,  $q$  pair :  $\mathcal{C}$  reste du même côté de sa tangente, celui indiqué par le sens de  $\vec{T}^{(q)}(t_0)$ , et aussi du même côté par rapport à  $\vec{T}^{(p)}(t_0)$  (pas de changement de signe pour les deux). On a un **point de rebroussement de 2ème espèce**.



# Chapitre 2

## Courbes en coordonnées polaires

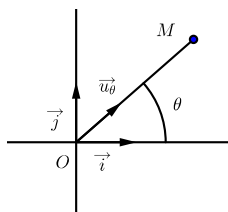
On munit le plan  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### 2.1 Définitions

**Définition 2.1.1.** Soit  $M(x, y)$  un point du plan. Le couple  $(r, \theta)$  est un système de coordonnées polaires du point  $M$  si

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = r \cos(\theta)\vec{i} + r \sin(\theta)\vec{j}.$$

En notant  $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$ , le couple  $(r, \theta)$  est un système de coordonnées polaires si, et seulement si  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_\theta$ .



Le système de coordonnées polaires nous amène à considérer une catégorie de courbes où le paramètre  $t$  est l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$  noté  $\theta$ . Ces courbes sont appelées *courbes en coordonnées polaires*.

**Définition 2.1.2.** Une courbe en coordonnées polaires est une application

$$\theta \in I \mapsto \rho(\theta) \in \mathbb{R}.$$

Le paramètre  $\theta$  est appelé *angle polaire* et  $\rho(\theta)$  est la mesure algébrique  $\overline{OM}$ . Le support de la courbe est

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} : \overrightarrow{OM} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta \right\}.$$

**Remarque 2.1.3.** • Dans la pratique, la courbe en coordonnées polaires désignera l'application  $\theta \mapsto \rho(\theta)$  et le support  $\mathcal{C}$ .

- Un même point de la courbe peut être défini par une infinité de couples  $(\theta, \rho(\theta))$ .

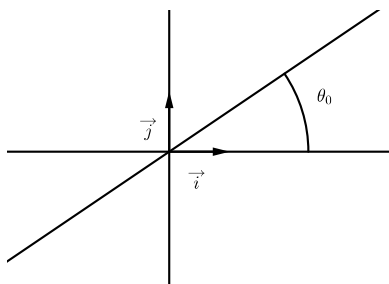
## 2.2 Premiers exemples

- Equation polaire d'un cercle :

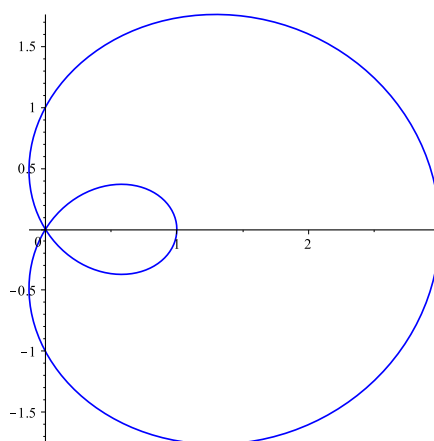
Pour  $c \in \mathbb{R}$ , l'équation  $\rho = c$  est l'équation polaire du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon  $|c|$ .

- Equation polaire d'une droite passant par l'origine :

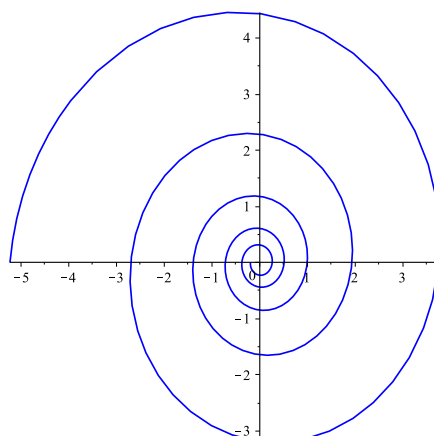
L'équation polaire d'une droite passant par l'origine faisant un angle  $\theta_0$  avec l'axe  $(Ox)$  est  $\theta = \theta_0$ .



- Courbe d'équation polaire :  $\rho(\theta) = 2 \cos(\theta) + 1$ , pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$



- Courbe d'équation polaire :  $\rho(\theta) = 0.9^\theta$ , pour  $\theta \in [-5\pi, 5\pi]$



## 2.3 Etude d'une courbe en coordonnées polaires

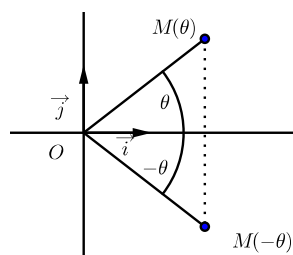
Tout comme pour les courbes paramétrées, on cherche à réduire le domaine d'étude en exploitant les propriétés de la fonction  $\rho$  (périodicité, parité, entre autres). Dans la suite, on note  $M(\theta)$  le point de la courbe en coordonnées polaires  $\theta \in I \mapsto \rho(\theta)$ .

### 2.3.1 Réduction du domaine d'étude

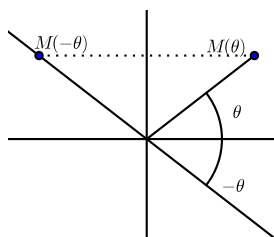
On note  $\mathcal{D}_\rho$  le domaine de définition de la fonction  $\rho$  qui est également le domaine de définition de la courbe en coordonnées polaires.

#### A- Parité

• **La fonction  $\rho$  est paire** : pour  $\theta \in I$ ,  $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ , alors  $\overline{OM}(-\theta) = \overline{OM}(\theta)$  et le point  $M(-\theta)$  se déduit du point  $M(\theta)$  par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe  $(Ox)$ .

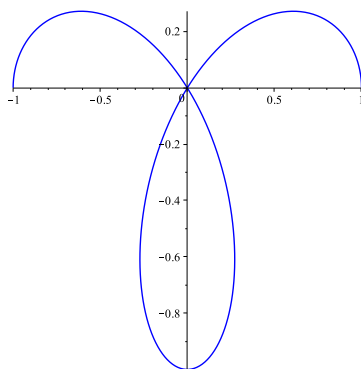


• **La fonction  $\rho$  est impaire** : pour  $\theta \in I$ ,  $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ , alors  $\overline{OM}(-\theta) = -\overline{OM}(\theta)$  et le point  $M(-\theta)$  se déduit du point  $M(\theta)$  par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe  $(Oy)$ .

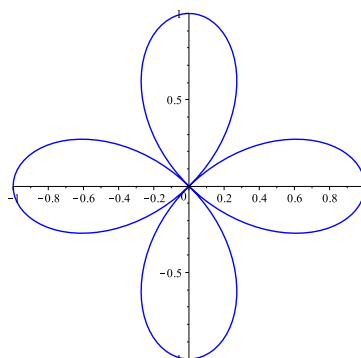


Si  $\rho$  est paire ou impaire, le domaine d'étude  $\mathcal{D}_e$  est alors  $\mathcal{D}_e = \mathcal{D}_\rho \cap [0, +\infty[$ .

**Exemple 2.3.1.** • *Courbes paire* :  $\mathcal{C} : \rho = \cos(2\theta)$ , pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . On commence par tracer la courbe pour  $\theta \in [0, \pi]$

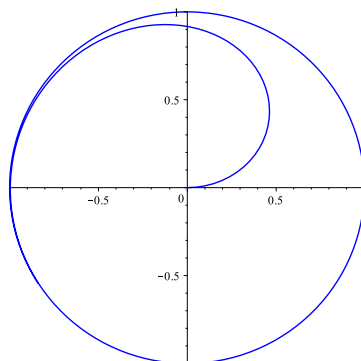


On déduit le reste de la courbe par symétrie par rapport à l'axe ( $Ox$ )

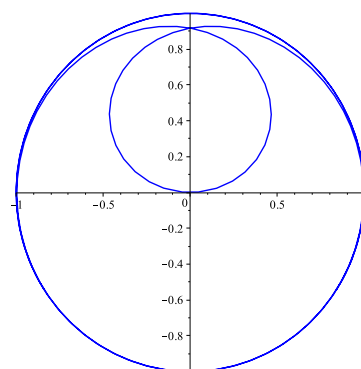


• *Courbes impaire* :  $\mathcal{C} : \rho = \text{th}(\theta)$ , pour  $\theta \in [-10, 10]$ . On commence par tracer la courbe pour  $\theta \in [0, 10]$  ce qui nous donne :





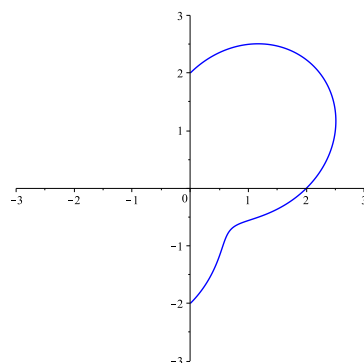
On déduit le reste de la courbe par symétrie ce qui donne :



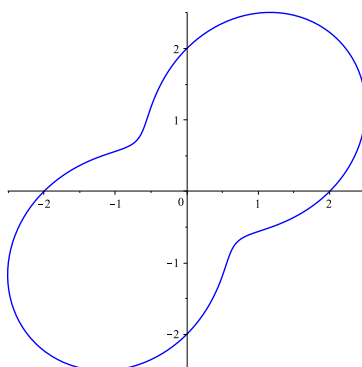
### B- Périodicité

Si la fonction  $\rho$  est  $T$ -périodique ( $\rho(\theta + T) = \rho(\theta)$  pour  $\theta \in I$ ), les points  $M(\theta)$  et  $M(\theta + T)$  sont confondus. On réduit ainsi l'étude à un intervalle de longueur  $T$  (par exemple,  $[0, T]$  ou  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ). On en déduit le reste de la courbe par *rotations* successives d'angle  $T, 2T$ , etc.

**Exemple 2.3.2.** Soit  $\mathcal{C} : \rho = \sin(2\theta) + 2$ , pour  $\theta \in \mathbb{R}$ . On commence par tracer la courbe sur un intervalle de longueur  $\pi$  par exemple,  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ce qui nous donne :



On déduit le reste de la courbe par rotation d'angle  $\pi$  pour obtenir



**Remarque 2.3.3.** Si  $T = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , on obtient directement toute la courbe sans faire de rotation en travaillant sur un intervalle de longueur  $T$ . Si  $T = \pi$ , la rotation d'angle  $\pi$  est la **symétrie centrale** de centre  $O$ .

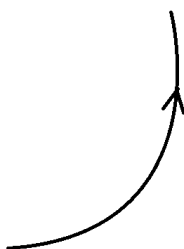
### 2.3.2 Etude des variations

On étudie les variations de  $\rho$  en étudiant le signe de  $\rho'$  là où  $\rho$  est dérivable.

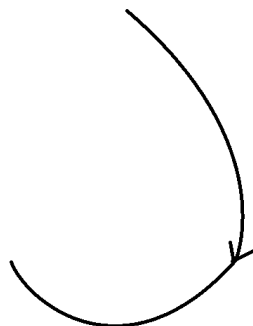
$\theta$	$\mathcal{D}_e$
$\rho'(\theta)$	signe
$\rho(\theta)$	variations

**Interprétation des variations :**

- si  $\rho$  est croissante et positive ou si  $\rho$  est décroissante négative, alors  $M$  s'éloigne de  $O$  en spiralant dans le sens trigonométrique.



- Si  $\rho$  est croissante et négative ou si  $\rho$  est décroissante et positive, alors on a un spiralement vers  $O$  dans le sens trigonométrique.



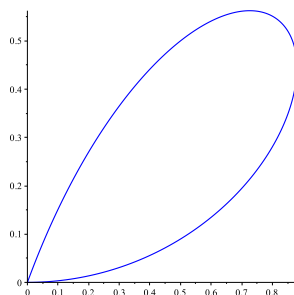
### 2.3.3 Exemple d'étude

On considère la courbe polaire  $\mathcal{C}$  d'équation  $\rho = \sin(3\theta)$ .

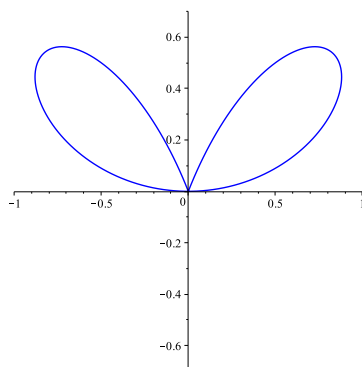
- On a  $\mathcal{D}_\rho = \mathbb{R}$ .
- $\rho$  est  $\frac{2\pi}{3}$ -périodique. On restreint l'étude à l'intervalle  $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ .
- $\rho$  est impaire, on restreint donc l'étude à  $\mathcal{D}_e = [0, \frac{\pi}{3}]$ .
- $\rho$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donc sur  $\mathcal{D}_e$  avec  $\rho'(\theta) = 3\cos(3\theta)$ , on obtient :

$\theta$	0		$\pi/6$		$\pi/3$
$3\cos(3\theta)$	3	+	0	-	-3
$\rho(\theta)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

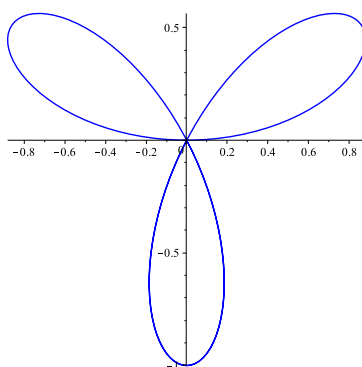
On commence par tracer la courbe sur  $[0, \frac{\pi}{3}]$ .



On construit la courbe sur  $[-\frac{\pi}{3}, 0]$  par symétrie par rapport à l'axe  $(Oy)$ .



On construit la courbe par rotation d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

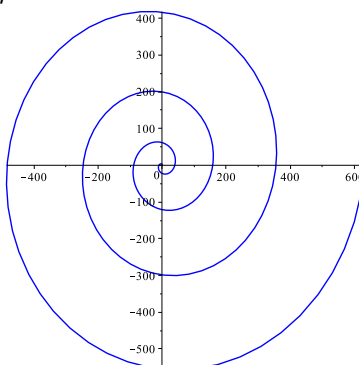


### 2.3.4 Branches infinies

On s'intéresse d'abord au comportement de  $\rho$  quand  $\theta$  tend vers l'infini. On distingue alors trois cas.

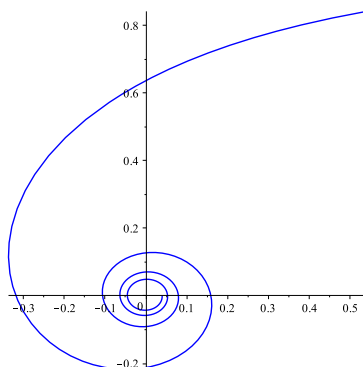
- Si  $\rho(\theta) \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{C}$  décrit une **spirale tendant vers l'infini**.

**Exemple 2.3.4.** Soit  $\mathcal{C} : \rho = \theta^2$



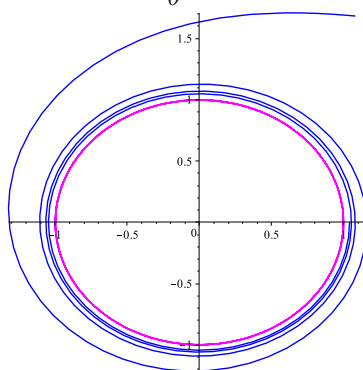
- Si  $\rho(\theta) \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{C}$  décrit une **spirale tendant vers O**.

**Exemple 2.3.5.** Soit  $\mathcal{C} : \rho = \frac{1}{\theta}$ .

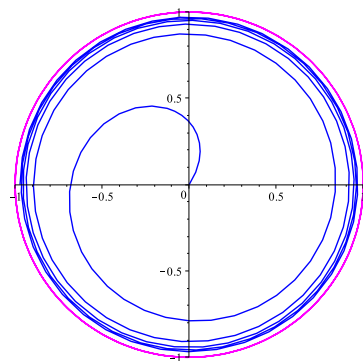


- Si  $\rho(\theta) \rightarrow a \neq 0$ ,  $\mathcal{C}$  décrit une **spirale tendant vers le cercle de centre  $O$  et de rayon  $|a|$**  depuis l'intérieur ou l'extérieur.

**Exemple 2.3.6.** Soit  $\mathcal{C}_1 : \rho(\theta) = 1 + \frac{1}{\theta}$ .



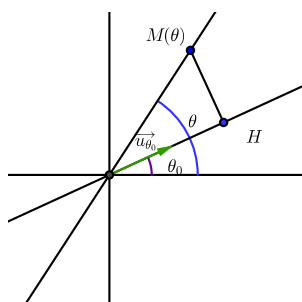
**Exemple 2.3.7.** Soit  $\mathcal{C}_2 : \rho = 1 - \frac{1}{\theta}$ .



A présent, on s'intéresse au cas où  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) = \infty$ . Soit  $M(\theta)$  le point de la courbe d'angle polaire  $\theta$ .

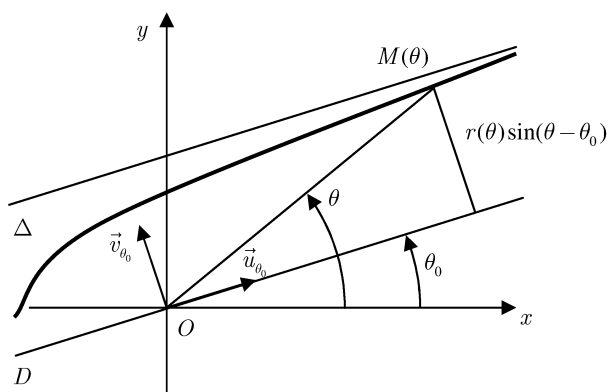
On considère  $H$  projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $(O, \vec{u}_{\theta_0})$  où  $\vec{u}_{\theta_0}$  est un vecteur directeur de la droite d'équation  $\theta = \theta_0$ . On a donc

$$\overline{HM} = \overline{OM} \sin(\theta - \theta_0) = \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0).$$



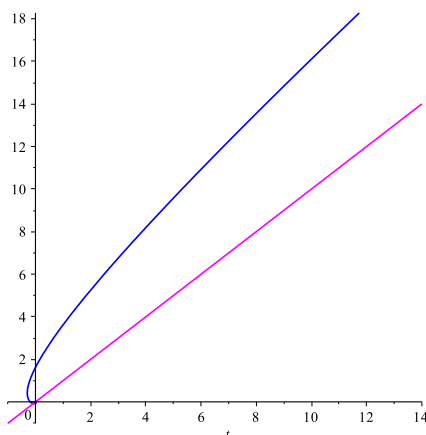
On a alors deux cas.

- Si  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \infty$ , alors  $\mathcal{C}$  admet une **branche parabolique** de direction la droite  $D$  d'équation polaire  $\theta = \theta_0$ .



**Remarque 2.3.8.** La quantité  $\rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$  est l'ordonnée du point  $M(\theta)$  dans le repère  $(O, \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$ .

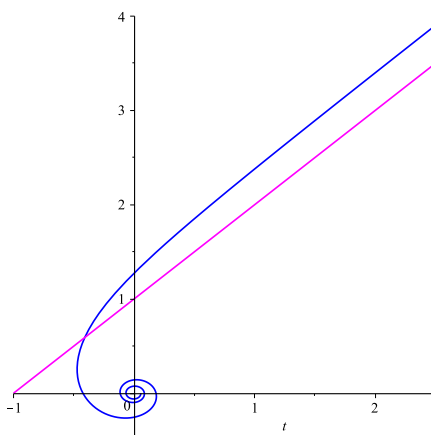
**Exemple 2.3.9.** Pour  $\mathcal{C} : \rho(\theta) = \frac{1}{(\theta - \pi/4)^2}$ , on a  $\lim_{\theta \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(\theta - \pi/4)}{(\theta - \pi/4)^2} = \infty$ .



- Si  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \ell$ , alors  $\mathcal{C}$  admet une **asymptote** parallèle à la droite  $(O, \vec{u}_{\theta_0})$  et située à une distance  $|\ell|$  de  $O$  (en dessous ou au-dessus de  $O$  suivant le signe de  $\ell$ ).

On peut voir que la droite asymptote est obtenue par translation de vecteur  $\ell \vec{v}_{\theta_0}$  de la droite d'équation  $\theta = \theta_0$ . Elle peut être également vue comme la droite d'équation  $Y = \ell$  où  $Y$  représente les ordonnées dans le repère  $(O, \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$ .

**Exemple 2.3.10.** Pour  $\mathcal{C} : \rho(\theta) = \frac{1}{\theta - \pi/4}$ , on a  $\lim_{\theta \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(\theta - \pi/4)}{\theta - \pi/4} = 1$ .



## 2.4 Etude locale

Soit  $\mathcal{C} : \theta \mapsto \rho(\theta)$  une courbe en coordonnées polaires et  $M_0(\theta_0)$  un de ses points. Calculons le **vecteur tangent**  $\vec{T}$  à  $\mathcal{C}$  en  $M_0$ . Pour tout point  $M(x, y)$  de  $\mathcal{C}$  d'angle polaire  $\theta$ , on a

$$\vec{OM}(x, y) = (\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta))$$

qui ne dépend que de  $\theta$ .

**Définition 2.4.1.** Pour étudier une courbe polaire  $\mathcal{C}$  en un de ses points  $M_0$ , on utilisera le **repère local** (appelé aussi **repère tournant**)  $(M, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$  pour  $M$  proche de  $M_0$ . Le repère orthonormé  $(M, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$  est direct avec  $\vec{u}_\theta := (\cos(\theta), \sin(\theta))$ . Dans ce repère, on a

$$\vec{OM} = \rho(\theta) \vec{u}_\theta.$$

Dans la suite, on suppose que  $\rho$  est dérivable en  $\theta$ .

**Proposition 2.4.2.** Le **vecteur tangent**  $\vec{T}$  à  $\mathcal{C}$  en  $M(\theta)$  est  $\frac{d\vec{OM}}{d\theta}$ . Dans le repère orthonormé usuel  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , le vecteur tangent est donné par

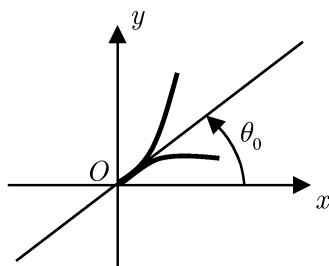
$$\vec{T} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho'(\theta) \cos(\theta) - \rho(\theta) \sin(\theta) \\ \rho'(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dans le repère local  $(M, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ , on a

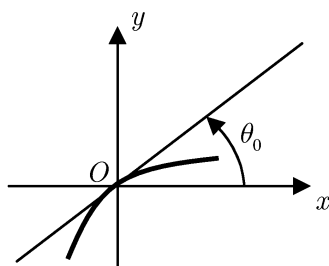
$$\vec{T} = \rho'(\theta) \vec{u}_\theta + \rho(\theta) \vec{v}_\theta.$$

- Si  $\rho'(\theta_0) = 0$  et  $\rho(\theta_0) \neq 0$ , on a :  $\vec{T} = \rho(\theta_0) \vec{v}(\theta_0)$ ; le vecteur tangent  $\vec{T}$  est alors orthogonal au vecteur  $\vec{OM}$ .
- Si  $\rho(\theta_0) = 0$  et  $\rho'(\theta_0) \neq 0$ , le point  $M_0$  est l'origine  $O$  du repère et on a :  $\vec{T} = \rho'(\theta_0) \vec{u}(\theta_0)$  et la tangente est la droite d'équation polaire  $\theta = \theta_0$ .
- Si  $\rho(\theta_0) = \rho'(\theta_0) = 0$ , le point  $M_0$  est l'origine  $O$  et est un **point singulier** de  $\mathcal{C}$ . Si  $p$  est le plus entier tel que  $\rho^{(p)}(\theta_0) \neq 0$ , alors un vecteur tangent est  $\rho^{(p)}(\theta_0) \vec{u}_{\theta_0}$ . Le comportement de la courbe au voisinage de l'origine est lié au changement de signe ou non de la fonction  $\rho$ . Deux cas se présentent alors :

- si  $\rho$  ne change pas de signe en  $\theta_0$ , alors  $O$  est un **point de rebroussement de 1ère espèce** :



- si  $\rho$  change de signe en  $\theta_0$ , alors  $O$  est un **point ordinaire**.





# Chapitre 3

## Aspect métrique des courbes

### 3.1 Longueur d'un arc

#### 3.1.1 Ligne polygonale et longueur d'arc

**Définition 3.1.1.** Soit  $\gamma : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée (ou arc paramètre) de fonctions coordonnées  $x$  et  $y$ . On considère une suite finie de réels  $\sigma = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$  tels que  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ . Cette suite  $\sigma$  est appelée subdivision de  $[a, b]$ .

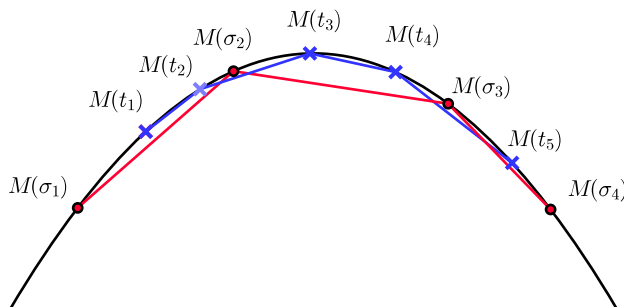
Pour  $i = 0, \dots, n$ , on note  $M(t_i)$  le point de la courbe  $\mathcal{C}$  de paramètre  $t_i$ . La suite de points  $(M(t_i))_{0 \leq i \leq n}$  est appelée **ligne polygonale** inscrite dans la courbe  $\mathcal{C}$  de longueur

$$L_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M(t_i)M(t_{i+1})} \right\|.$$

On dit que la courbe est rectifiable s'il existe  $M > 0$  tel que pour toute subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$ ,

$$L_\sigma(\gamma) \leq M. \tag{3.1}$$

La longueur de la courbe est le plus petit  $M > 0$  vérifiant (3.1) et est notée  $\ell(\gamma)$ .



### 3.1.2 Abscisse curviligne

**Définition 3.1.2.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe rectifiable. On appelle **abscisse curviligne** une application  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que si  $t, t' \in I$ ,  $t < t'$  alors

$$\ell(\gamma_{t,t'}) = |s(t') - s(t)|,$$

où  $\ell(\gamma_{t,t'})$  est la longueur de la courbe entre les points  $M(t)$  et  $M(t')$  de la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Proposition 3.1.3.** Soit  $\gamma : t \in I = [a, b] \mapsto (x(t), y(t))$  une courbe paramétrée telle que les applications coordonnées  $x$  et  $y$  sont continûment dérivables. Alors,  $\gamma$  est une courbe rectifiable et la longueur de la courbe est

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| dt = |s(b) - s(a)|.$$

En particulier,  $s'(t) = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|$  pour tout  $t \in I$ .

**Remarque 3.1.4.** Pour tout  $t \in I$ ,  $s'(t) \geq 0$  : l'abscisse curviligne est donc croissante. En tout point régulier  $M(t)$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $s'(t) > 0$ .

**Proposition 3.1.5.** Si l'arc  $\gamma$  est un arc paramétré (en coordonnées cartésiennes), on a pour  $t \in I$ ,

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Si  $\theta \in I \mapsto \rho(\theta)$  est une courbe en coordonnées polaires, on a pour  $\theta \in I$

$$s'(\theta) = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}.$$

**Preuve :** Si la courbe est exprimée en coordonnées cartésiennes d'applications coordonnées  $x$  et  $y$ , alors pour  $t \in I$ , on a

$$s'(t) = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Si  $\theta \in I \mapsto \rho(\theta)$  est une courbe en coordonnées polaires, alors on exprime les applications coordonnées en fonction du rayon polaire et de l'angle polaire :

$$x(\theta) = \rho(\theta) \cos(\theta) \quad y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta).$$

Puisque

$$x'(\theta) = \rho'(\theta) \cos(\theta) - \rho(\theta) \sin(\theta) \quad \text{et} \quad y'(\theta) = \rho'(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta),$$

on obtient

$$\begin{aligned} s'(\theta) &= \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} = \sqrt{(\rho'(\theta) \cos(\theta) - \rho(\theta) \sin(\theta))^2 + (\rho'(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta))^2} \\ &= \sqrt{\rho^2(\theta)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + \rho'^2(\theta)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}. \end{aligned}$$

□

**Exemple 3.1.6** (Longueur d'un cercle). On considère le cercle de centre  $A(a, b)$  et de rayon  $R$ .

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = a + R \cos(t) \\ y = b + R \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

La dérivée de l'abscisse curviligne est

$$s'(t) = \sqrt{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} = R.$$

La longueur de la courbe est

$$\ell = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

**Exemple 3.1.7** (Longueur de la courbe représentative d'une fonction). Soit  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs réelles. Une représentation paramétrique de  $f$  est

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, t \in I.$$

La dérivée de l'abscisse curviligne est donnée par

$$s'(t) = \sqrt{1 + f'(t)^2}, t \in I.$$

Alors,

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

**Exemple 3.1.8** (Longueur de la cardioïde). Soit  $\mathcal{C} : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto \rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ . La courbe est symétrique par rapport à l'axe  $(Ox)$  ce qui permet de réduire le domaine d'étude à  $[0, \pi]$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
\ell = 2\ell(\mathcal{C}_{0,\pi}) &= 2 \int_0^\pi \sqrt{(1 + \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} d\theta \\
&= 2 \int_0^\pi \sqrt{2(1 + \cos(\theta))} d\theta \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta \\
&= 4 \int_0^\pi \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta \\
&= 4 \int_0^\pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad \text{car } \cos \text{ est positif sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
&= 8 \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
&= 8.
\end{aligned}$$

**Exemple 3.1.9** (Longueur de l'astroïde). Soit

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

On commence par calculer la dérivée de l'abscisse curviligne  $s'$  sur  $[0, 2\pi]$  :

$$\begin{aligned}
s'(t) &= \sqrt{(-3 \cos^2(t) \sin(t))^2 + (3 \sin^2(t) \cos(t))^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{3 \sin(2t)}{2}\right)^2 \cos^2(t) + \left(\frac{3 \sin(2t)}{2}\right)^2 \sin^2(t)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{3 \sin(2t)}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} |\sin(2t)|.
\end{aligned}$$

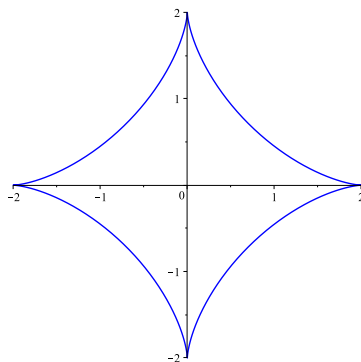
Le domaine d'étude réduit de  $\mathcal{C}$  est  $[0, \frac{\pi}{4}]$  : une fois tracée sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{4}]$ , on obtient la courbe sur  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  par symétrie par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation  $y = x$ ). Par symétrie orthogonale par rapport à l'axe ( $Oy$ ), on obtient la courbe sur  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ . La courbe  $\mathcal{C}$  est obtenue sur  $[\pi, 2\pi]$  par symétrie orthogonale par rapport à l'axe ( $Ox$ ).

On commence alors par calculer la longueur de la courbe sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . Comme  $\sin(2t) \geq 0$  pour  $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , on a  $|\sin(2t)| = \sin(2t)$  et

$$\ell(\gamma_{0,\pi/4}) = \int_0^{\pi/4} \frac{3}{2} \sin(2t) dt = \frac{3}{2} \left[ -\frac{\cos(2t)}{2} \right]_{t=0}^{t=\pi/4} = \frac{3}{4}.$$

En exploitant les propriétés de symétrie de  $\mathcal{C}$ , on a  $\ell(\gamma) = 8\ell(\gamma_{0,\pi/4})$  et

$$\ell(\gamma) = 8 \times \frac{3}{4} = 6.$$



## 3.2 Représentation paramétrique par l'abscisse curviligne

### 3.2.1 Paramétrage par l'abscisse curviligne

**Définition 3.2.1.** *Un paramétrage normal de  $\mathcal{C}$  est une application  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que pour  $u \in I$ ,*

$$\|g'(u)\| = 1.$$

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée régulière (i.e tous ses points  $M(t)$  sont réguliers). Alors,*

- *$s$  réalise une bijection de  $I$  sur  $s(I)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et telle que  $s^{-1}$  est  $\mathcal{C}^1$ ,*
- *$\gamma \circ s^{-1}$  est un paramétrage normal de  $\mathcal{C}$ .*

**Conséquences 3.2.3.** • *Toute courbe paramétrée régulière peut être paramétrée par l'abscisse curviligne.*

- *Une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne est une courbe parcourue à vitesse constante égale à 1.*

### 3.2.2 Repère de Frénet

Dans la suite, on considère la courbe  $s \mapsto M(s)$  paramétrée par l'abscisse curviligne.

**Définition 3.2.4** (Repère de Frénet). *Le vecteur tangent unitaire est donné par*

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{OM}}{ds}.$$

On note  $\vec{N}(s) = \text{Rot}_{\pi/2}(\vec{T}(s))$  le vecteur orthogonal au vecteur tangent unitaire. Le vecteur  $\vec{N}(s)$  est appelé **vecteur normal unitaire**. Le repère orthonormé direct  $(M(s), \vec{T}(s), \vec{N}(s))$  est appelé **repère de Frénet**.

**Proposition 3.2.5** (Formules de Frénet). *Pour tout  $M(s) \in \mathcal{C}$ , il existe  $c(s) > 0$  tel que*

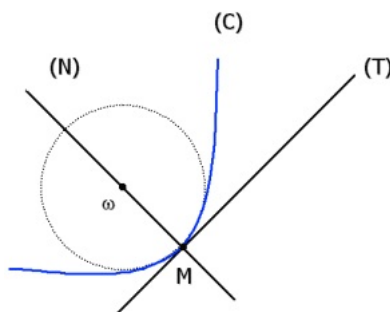
$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = c(s)\vec{N}(s) \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{N}(s)}{ds} = -c(s)\vec{T}(s),$$

et  $c(s) = \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\|$  est la **courbure** le long de  $\mathcal{C}$ .

**Définition 3.2.6.** *Soient  $\mathcal{C}$  une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne et  $M(s) \in \mathcal{C}$ .*

- $M(s)$  est un **point birégulier** si  $c(s) \neq 0$ .
- Le **rayon de courbure**  $R(s)$  au point birégulier  $M(s)$  est le réel  $\frac{1}{c(s)}$ .
- Le point  $\omega(s)$  défini par  $\overrightarrow{M(s)\omega(s)} = R(s)\vec{N}(s)$  est appelé **centre de courbure** de  $\mathcal{C}$  en  $M(s)$ .
- Le cercle de centre  $\omega(s)$  et de rayon  $|R(s)|$  est appelé **cercle osculateur**. Le cercle osculateur est le cercle qui approche le mieux la courbe au voisinage de  $M(s)$ .

**Remarque 3.2.7.** *Le rayon de courbure peut être infini.*



**Proposition 3.2.8** (Calculs directs). *Pour une courbe paramétrée  $\mathcal{C} : t \in I \mapsto (x(t), y(t))$ , on a*

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \\ \vec{N} &= \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}, \\ R &= \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}.\end{aligned}$$

*Pour une courbe définie par une fonction  $: t \in I \mapsto (t, f(t))$ , on a*

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{1}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}, \\ \vec{N} &= \frac{1}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \begin{pmatrix} -f'(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \\ R &= \frac{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}{f''(t)}.\end{aligned}$$

*Pour une courbe en coordonnées polaires  $\mathcal{C} : \theta \in I \mapsto \rho(\theta)$ , on a*

$$R = \frac{(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2)^{3/2}}{\rho(\theta)^2 + 2\rho'(\theta)^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta)}.$$





# Calculs de longueur, rayon de courbure et centre de courbure

**Exemple 3.2.9.** Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f : x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \mapsto \ln(\cos(x))$ . On commence par donner les équations paramétriques de  $\mathcal{C}$  :

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = t \\ y = \ln(\cos(t)) \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

La dérivée de l'abscisse curviligne est pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\begin{aligned} s'(t) = \sqrt{1 + (y'(t))^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\right)^2} = \sqrt{1 + \tan^2(t)} \\ &= \frac{1}{|\cos(t)|} \quad \text{où on se sert de l'identité } 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} \\ &= \frac{1}{\cos(t)} \quad \text{car } \cos \text{ est positif sur } \left[0, \frac{\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$

La longueur  $\ell$  de la courbe sur  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  est

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{\pi/3} s'(t) dt = \int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos(t)} \\
&= \int_0^{\pi/3} \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos(t)} dt \\
&= \int_0^{\pi/3} \cos(t) + \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} dt \\
&= \int_0^{\pi/3} \left(1 + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}\right) \cos(t) dt \\
&= \int_0^{\pi/3} \left(1 + \frac{\sin^2(t)}{1 - \sin^2(t)}\right) \cos(t) dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}/2} 1 + \frac{u^2}{1 - u^2} du = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1 - u^2} du \text{ avec le changement de variables } u = \sin(t) \\
&= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1/2}{1 - u} + \frac{1/2}{1 + u} du \\
&= \left[-\frac{1}{2} \ln(|1 - u|)\right]_{u=0}^{\sqrt{3}/2} + \left[\frac{1}{2} \ln(|1 + u|)\right]_{u=0}^{\sqrt{3}/2} \\
&= \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

### Calcul du rayon de courbure

On utilise la formule

$$R = \frac{(1 + y'(t)^2)^{3/2}}{y''(t)},$$

où  $y'(t)^2 = \tan^2(t)$  et  $y''(t) = \frac{-1}{\cos^2(t)}$ . Ainsi, pour  $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ ,

$$R = \frac{(1 + \tan^2(t))^{3/2}}{\frac{-1}{\cos^2(t)}} = -\frac{\cos^2(t)}{\cos^3(t)} = -\frac{1}{\cos(t)}.$$

En évaluant en  $t = \frac{\pi}{3}$ , on obtient  $R = -2$ .

### Calcul des coordonnées du centre de courbure

Le centre de courbure en  $M(t)$  est le point  $\omega$  défini par

$$\overrightarrow{M(t)\omega} = R\vec{N},$$

où  $\vec{N}$  est le vecteur normal unitaire. On a la formule

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \frac{1}{\sqrt{1+y'(t)^2}} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\cos(t)}} \begin{pmatrix} \tan(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \cos(t) \begin{pmatrix} \tan(t) \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

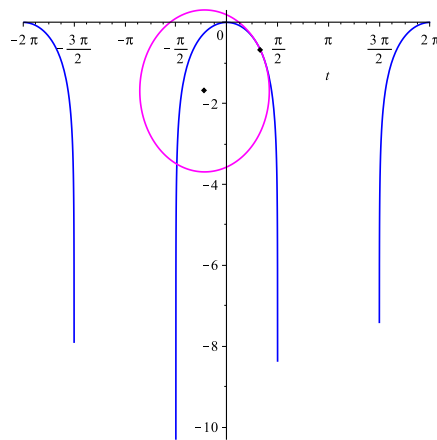
On en déduit alors

$$\omega = \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos(t)) \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos(t)} \cos(t) \begin{pmatrix} \tan(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \tan(t) \\ \ln(\cos(t)) - 1 \end{pmatrix}.$$

En évaluant en  $t = \frac{\pi}{3}$ , on obtient

$$\omega \left( \frac{\pi}{3} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \\ -\ln(2) - 1 \end{pmatrix}.$$

Le cercle osculateur est le cercle de centre  $\omega$  et de rayon  $|R|$ .



**Exemple 3.2.10** (La cycloïde). Soit  $\mathcal{C}$  la courbe paramétrée

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

La dérivée de l'abscisse curviligne est pour  $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} s'(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2} &= \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{1 + \cos^2(t) + \sin^2(t) - 2\cos(t)} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos(t))} \\ &= \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{où on se sert de l'identité } 1 - \cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{car } \sin \text{ est positif sur } [0, \pi]. \end{aligned}$$

La longueur  $\ell$  de la courbe sur  $[0, 2\pi]$  est

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} s'(t) dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= 4 \left[ -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_{t=0}^{2\pi} = -4\cos(\pi) + 4\cos(0) \\ &= 8. \end{aligned}$$

### Calcul du rayon de courbure

On utilise la formule

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}$$

où  $x''(t) = \sin(t)$  et  $y''(t) = \cos(t)$ . On obtient donc pour  $t \in [0, \pi]$ ,

$$\begin{aligned} R &= \frac{(4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right))^{3/2}}{(1 - \cos(t))\cos(t) - \sin^2(t)} = \frac{8\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos(t) - 1} \\ &= -\frac{4\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= -4\sin\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

En évaluant en  $t = \pi$ , on obtient  $R = -4$ .

Calcul des coordonnées du centre de courbure

Lorsque  $t = \pi$ , le centre de courbure en  $M(\pi) = (\pi, 2)$  est le point  $\omega$  défini par

$$\overrightarrow{M(\pi)\omega} = R\vec{N},$$

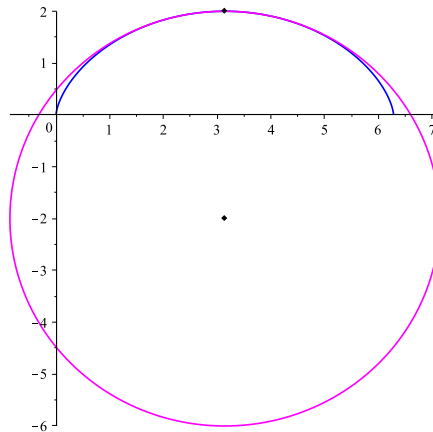
où  $\vec{N}$  est le vecteur normal unitaire donné par

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \frac{1}{s'(\pi)} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \sin(\pi/2)} \begin{pmatrix} -\sin(\pi) \\ 1 - \cos(\pi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\omega = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le cercle osculateur est le cercle de centre  $\omega = (\pi, -2)$  et de rayon  $|R| = 4$ .

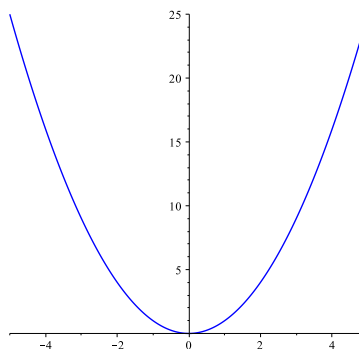
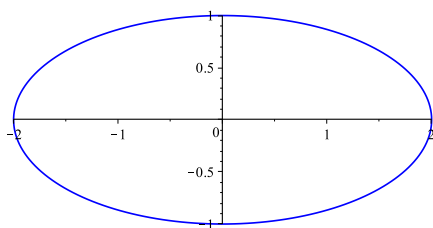




# Annexe : Courbes de Bézier

## Problématique lié à l'histoire

Dans les années 1960, les machines numériques usinent des courbes considérées comme « simples » en terme de régularité : c'est le cas des ellipses, des paraboles :



Il est très vite arrivé la nécessité de modéliser mathématiquement des courbes plus complexes et moins régulières ; un des objectifs principaux étant de tracer des courbes « à main levée » par ordinateur. En effet, ce type de courbes apparaît dans le design automobile pour le tracé de profils de carrosserie, pour le tracé des hélices d'avion, des coques de bateau, entre autres.

C'est dans ce contexte que Pierre Bézier, ingénieur chez Renault inventa les *courbes de Bézier* : il s'agit d'une classe de courbes paramétrées définies par des polynômes. Ce concept s'est étendu au cas 3D avec la notion de *surfaces de Bézier* qui sont également une catégorie de surfaces paramétrées (hors programme). Les courbes et surfaces de Bézier sont à la base de logiciels utilisés en CAO comme *CATIA*.

Le mathématicien français Paul de Casteljaou travaillant pour Citroën a proposé un algorithme dit *Algorithme de Casteljaou* utilisé pour construire efficacement les courbes et surfaces de Bézier. Cet algorithme n'est plus employé actuellement mais a eu un rôle crucial en informatique dans les logiciels de dessin par exemple.

Une autre application des courbes de Bézier est liée à la typographie pour les polices PostScript : la rapidité de calcul des courbes de Bézier permet de recalculer les courbes pour chaque grossissement de caractères.

## Barycentres

**Définition 3.2.11** (Barycentre de deux points pondérés). *Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a + b \neq 0$ . Le barycentre  $G$  des points pondérés  $(A, a)$  et  $(B, b)$  est l'unique point du plan défini par*

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Dans la pratique, le barycentre de 2 points pondérés est donné par la proposition suivante.

**Proposition 3.2.12.** *Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a + b \neq 0$ .  $G$  est le barycentre de  $\{(A, a), (B, b)\}$  si et seulement si*

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

**Remarque 3.2.13.** *Les points  $A$ ,  $G$  et  $B$  sont alignés : en d'autres termes, le barycentre de deux points distincts du plan  $A$  et  $B$  appartient à la droite  $(AB)$ .*

La notion de barycentre se généralise à un système de  $n \geq 2$  points pondérés.

**Définition 3.2.14** (Barycentre de  $n$  points pondérés). *Soient  $A_1, \dots, A_n$   $n$  points du plan et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ . Le barycentre  $G$  du système de points pondérés  $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  est l'unique point du plan défini par*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

On retrouve dans la proposition suivante une extension de la proposition 3.2.12 au cas d'un système de  $n$  points pondérés.

**Proposition 3.2.15.** *Sous les mêmes hypothèses que la Définition 3.2.14, un point  $G$  est le barycentre du système de points pondérés  $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  est si et seulement si*

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i=2}^n \lambda_i \overrightarrow{A_1A_i}.$$



**Remarque 3.2.16.** Lorsque  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , le point  $G$  est le barycentre du système de points pondérés  $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  si et seulement si

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Lorsque les  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont tous égaux, on parle d'**isobarycentre**

**Remarque 3.2.17.** • L'*isobarycentre* de 2 points  $A$  et  $B$  est le milieu du segment  $[AB]$ .

• L'*isobarycentre* de 3 points  $A$ ,  $B$  et  $C$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$  (point d'intersection des médianes).

## Courbes de Bézier

Les courbes de Bézier sont des courbes paramétrées où le point  $M(t)$  pour  $t \in [0, 1]$  est le **barycentre** de  $n + 1$  points du plan  $A_i$

$$M(t) = B_0(t)A_0 + B_1(t)A_1 + \dots + B_n(t)A_n,$$

avec  $B_i$  polynôme de Bernstein que l'on définit dans la suite.

## Polynômes de Bernstein

On considère dans la suite des polynômes de degré  $n$  fixé.

**Définition 3.2.18** (Polynôme de Bernstein). Soit  $i \in \mathbb{N}$ . On appelle  *$i^{\text{ème}}$  polynôme de Bernstein* le polynôme

$$B_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

**Proposition 3.2.19.** (i) Les polynômes  $B_i$  sont positifs sur  $[0, 1]$ . On a

$$\sum_{i=1}^n B_i(t) = 1.$$

(ii) On a  $B_0(t) = (1-t)^n$  et  $B_n(t) = t^n$ .

(iii) On a  $B'_0(0) = -n$ ,  $B'_1(0) = n$ ,  $B'_{n-1}(1) = -n$  et  $B'_n(1) = n$ .

**Preuve :** (i) Lorsque  $t \in [0, 1]$ , il est clair que les polynômes  $B_i$  sont positifs. A présent, par la formule du binôme de Newton, on remarque que

$$\sum_{i=1}^n B_i(t) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (t + (1-t))^n = 1.$$

(ii) Il est clair que  $B_0(t) = \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n = (1-t)^n$  et  $B_n(t) = \binom{n}{n} t^n (1-t)^0 = t^n$ .

(iii) D'après ce qui précède, on a  $B'_0(t) = -n(1-t)^{n-1}$  et  $B'_n(t) = nt^{n-1}$  ce qui donne respectivement  $B'_0(0) = -n$  et  $B'_n(1) = n$ . Pour  $i = 1$ ,  $B_1(t) = nt(1-t)^{n-1}$  et  $B'_1(t) = n(1-t)^{n-1} - n(n-1)t(1-t)^{n-2}$ . Lorsque  $i = n-1$ , on a  $B_{n-1}(t) = (n-1)t^{n-1}(1-t)$  ce qui implique que

$$B_{n-1}(t) = n(n-1)t^{n-2}(1-t) - nt^{n-1},$$

On obtient alors que  $B'_1(0) = n$  et  $B'_{n-1}(1) = -n$ .

□

## Courbes de Bézier

**Définition 3.2.20** (Courbe de Bézier). Soient  $P_0, P_1, \dots, P_n$   $n+1$  points distincts du plan  $\mathcal{P}$ . Soient  $B_0, B_1, \dots, B_n$  les  $n+1$  polynômes de Bernstein de degré  $n$ . Lorsque  $t \in [0, 1]$ , l'ensemble des points  $M(t)$  définis par

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) \overrightarrow{OP}_i, \quad t \in [0, 1],$$

est appelée **courbe de Bézier** associée aux points de contrôle  $P_0, P_1, \dots, P_n$ .

**Remarque 3.2.21.** On a  $M(0) = P_0$  et  $M(1) = P_n$ .

Si  $P_i$  a pour coordonnées  $(x_i, y_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ , une représentation paramétrique de la courbe de Bézier de points de contrôle  $P_0, P_1, \dots, P_n$  est

$$\mathcal{C} \begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) x_i \\ y(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) y_i \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

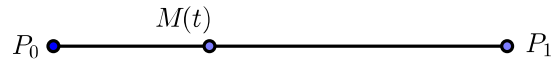
**Exemple 3.2.22** (Courbe de Bézier d'ordre 1). Soient  $P_0$  et  $P_1$  deux points du plan. La courbe de Bézier (d'ordre 1) associée aux points de contrôle  $P_0$  et  $P_1$  est donnée par

$$\overrightarrow{OM}(t) = B_0(t) \overrightarrow{OP}_0 + B_1(t) \overrightarrow{OP}_1,$$

où  $B_0$  et  $B_1$  sont des polynômes de Bernstein de degré égale à l'ordre de la courbe de Bézier, c'est-à-dire, égale à 1. On a alors

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1}.$$

Il s'agit du segment  $[P_0P_1]$ .



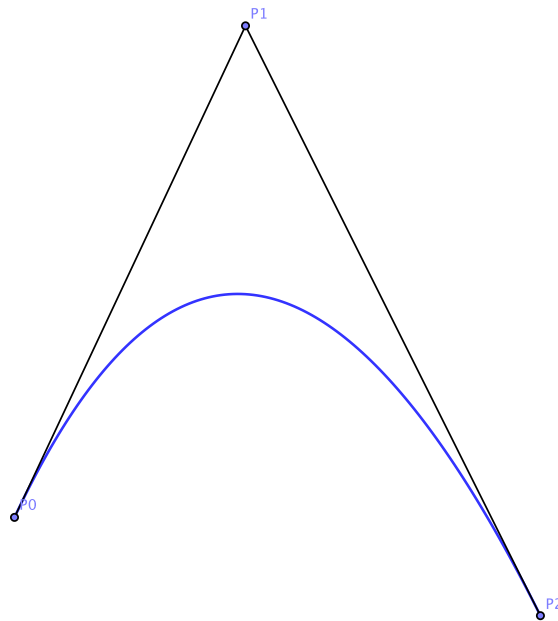
**Exemple 3.2.23** (Courbe de Bézier d'ordre 2). Soient  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  trois points du plan. La courbe de Bézier (d'ordre 2) associée aux points de contrôle  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  est donnée par

$$\overrightarrow{OM}(t) = B_0(t)\overrightarrow{OP_0} + B_1(t)\overrightarrow{OP_1} + B_2(t)\overrightarrow{OP_2},$$

où  $B_0$ ,  $B_1$  et  $B_2$  sont des polynômes de Bernstein de degré égale à l'ordre de la courbe de Bézier, c'est-à-dire, égale à 2. On a alors

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^2\overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t)\overrightarrow{OP_1} + t^2\overrightarrow{OP_2}.$$

Il s'agit d'un arc de parabole.



**Exemple 3.2.24** (Courbe de Bézier d'ordre 3). Soient  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  quatre points du plan. La courbe de Bézier d'ordre 3 associée aux points de contrôle  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  est donnée par

$$\overrightarrow{OM}(t) = B_0(t)\overrightarrow{OP_0} + B_1(t)\overrightarrow{OP_1} + B_2(t)\overrightarrow{OP_2} + B_3(t)\overrightarrow{OP_3},$$

où  $B_0, B_1, B_2$  et  $B_3$  sont des polynômes de Bernstein de degré 3. On a alors

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^3 \overrightarrow{OP_0} + 3t(1-t)^2 \overrightarrow{OP_1} + 3t^2(1-t) \overrightarrow{OP_2} + t^3 \overrightarrow{OP_3}.$$

