Table des Matières

CHAPITRE 1

ESPACES EUCLIDIENS DE DIMENSION 2 et 3

Dans ce chapitre on se fixe une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ (en général la base canonique) qui détermine l'orientation des espaces euclidiens que l'on considère.

I. Espaces euclidiens de dimension 2

I.1. Étude de $O_2(\mathbb{R})$.

Théorème 1.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$$a) \qquad M \in O_2(\mathbb{R})$$

$$b) \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \ / \ M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad ou \quad M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$c) \qquad \exists a,\ b \in \mathbb{R} \text{ tel que } a^2+b^2=1,\ \exists \varepsilon \in \{-1,\ 1\}, \quad M = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si $M \in O_2(\mathbb{R})$ alors ses vecteurs lignes (ou colonnes) forment une base orthonormée, c'est-à-dire qu'on a : $a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1$ et $ac+bd=0$. Des deux premières équations on déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $a=\cos(\alpha)$, $b=\sin(\alpha)$, $c=\sin(\beta)$ et $d=\cos(\beta)$. En injectant ceci dans la troisième égalité on trouve $\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)=0$, c'est-à-dire $\sin(\alpha+\beta)=0$, ou encore $\alpha+\beta = 0 \bmod \pi$. D'où si $\alpha=-\beta \bmod 2\pi$ alors $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, et si $\alpha = \pi-\beta \bmod 2\pi,\ M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$, donc $a)$ entraîne $b)$.
Soit maintenant M une matrice de la forme de celles données dans $b)$. En posant $a=\cos(\alpha)$ et $b=\sin(\alpha)$, on a $a^2+b^2=1$ et en prenant $\varepsilon \in \{-1,\ 1\}$ suivant le cas, on retrouve $c)$.
Enfin si M est de la forme donnée dans $c)$ on a

$$M\,{}^tM = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\varepsilon b & \varepsilon a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+\varepsilon^2 b^2 & ab-\varepsilon^2 ab \\ ab-\varepsilon^2 ab & \varepsilon^2 a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $a^2+b^2=1$ et $\varepsilon^2=1$. Donc $M \in O_2(\mathbb{R})$. □

Nous allons maintenant donner un résultat dans lequel on donne les propriétés des matrices de $O_2(\mathbb{R})$.
Pour α un réel on définit les matrices de $O_2(\mathbb{R})$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Proposition 2. *Avec les notations définies ci-dessus on a : $\forall \alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{cases} (R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha} & R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta} = R_\beta R_\alpha \\ (S_\alpha)^{-1} = S_\alpha & S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta} \\ R_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta} & S_\beta R_\alpha = S_{\beta-\alpha} \end{cases}$$

On peut remarquer que les matrices R_α sont les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ et les matrices S_α sont celles de $O_2^-(\mathbb{R}) = O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$. D'après la proposition ci-dessus les premières commutent entre elles mais pas les secondes.

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait directement en utilisant le produit matriciel et les propriétés des fonctions trigonométriques. □

I.2. Étude de $SO(E)$.

Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté par la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Proposition 3. *Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E et $f \in SO(E)$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

De plus dans toute base orthonormée directe la matrice de f est exactement celle donnée ci-dessus et dans toute base orthonormée indirecte la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. Si f appartient à $SO(E)$ alors $M_{\mathcal{B}}(f)$ appartient à $SO_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormée directe de E. Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de E, la matrice de passage appartient à $O_2(\mathbb{R})$. De plus elle sont toutes les deux directes, donc le déterminant de la matrice de passage vaut 1, elle appartient donc à $SO_2(\mathbb{R})$. Elle est donc de la forme R_θ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice de f dans la nouvelle base s'écrit donc

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = (R_\theta)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) R_\theta = (R_\theta)^{-1} R_\alpha R_\theta = R_\alpha = M_{\mathcal{B}}(f),$$

d'après la Proposition 2.
Soit maintenant $\mathcal{B}''$ une base orthonormée indirecte de E. Donc la matrice de passage appartient à $O_2^-(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'elle a la forme S_θ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice de f dans la nouvelle base s'écrit donc

$$M_{\mathcal{B}''}(f) = (S_\theta)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) S_\theta = (S_\theta)^{-1} R_\alpha S_\theta = R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

d'après la Proposition 2. □

Définition 4. *Soit $f \in SO(E)$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe de E est*

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

On dit que f est la rotation d'angle (orienté) α.

Proposition 5. *Soient u et v deux vecteurs unitaires de E. Alors, il existe une unique rotation $R_\alpha \in SO(E)$ telle que $R_\alpha(u) = v$. On dit alors que l'angle formé par u et v est l'angle α.*

DÉMONSTRATION. Si le vecteur u est fixé on peut alors trouver une base orthonormée directe (u, u_1) de E. Soit alors $v = au + bu_1$ écrit dans cette base. Si la rotation R existe on doit avoir $R(u) = v$. Donc la matrice de R dans cette base est

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Cette application convient en effet on a $R(u) = v$, et $1 = ||v||^2 = a^2 + b^2$. C'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\alpha)$ et $b = \sin(\alpha)$. Donc la matrice de R dans la base orthonormée directe est

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

qui est celle de la rotation d'angle α. □

Proposition 6. *Soit α l'angle formé par deux vecteurs unitaires u et v de E. Alors*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\alpha) & = & u.v \\ \sin(\alpha) & = & \det(u, v) \end{array} \right.$$

où $u.v$ est le produit scalaire de u et v.

Démonstration. D'après la proposition précédente v est l'image de u par une rotation d'angle α. De plus la démonstration montre que dans une base orthonormée directe de premier vecteur u, v a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$; et u évidemment $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où lorsqu'on calcule le produit scalaire $u.v$ on obtient $\cos(\alpha)$ et lorsqu'on calcule $\det(u, v)$ on obtient $\sin(\alpha)$. □

I.3. Étude de $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$.

Proposition 7. *Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $f \in O^-(E)$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

et f est une symétrie orthogonale par rapport à la droite de ses vecteurs invariants. *Réciproquement, toute symétrie orthogonale appartient à $O^-(E)$.*

Démonstration. Soit $f \in O^-(E)$. Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ appartient à $O_2^-(\mathbb{R})$,c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est donc égal à $\chi_f(X) = \det(S_\alpha - X\mathrm{I}_2) = X^2 - 1$. Il y a deux valeurs propres 1 et -1. Lorsqu'on détermine le sous-espace propre associé à $\lambda = 1$ on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\cos(\alpha) - 1)x + \sin(\alpha)y = 0 \\ \sin(\alpha)x - (\cos(\alpha) + 1)y = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -2\sin^2(\frac{\alpha}{2})x + 2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})y = 0 \\ 2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})x - 2\cos^2(\frac{\alpha}{2})y = 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\sin(\frac{\alpha}{2})x + \cos(\frac{\alpha}{2})y & = & 0 \end{array} \right.$$

qui est l'équation *de la droite invariante*. Une base de E_1 est donc donnée par $u_1 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$. De même on montre que E_{-1}, le sous-espace propre associé à $\lambda = -1$ est déterminé par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\frac{\alpha}{2})x + \sin)\frac{\alpha}{2})y & = & 0 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire qu'une de ses bases est donnée par $u_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$. La matrice de f dans (u_1, u_2) s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

f est donc une symétrie orthogonale par rapport à E_1, c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $-\sin(\dfrac{\alpha}{2})x + \cos(\dfrac{\alpha}{2})y = 0$.

Réciproquement, si f est une symétrie orthogonale, dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ convenable sa matrice s'écrit

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $M_{\mathcal{B}}(f) \in O_2^{-1}(\mathbb{R})$ c'est-à-dire que f appartient à $O^{-1}(E)$. □

Proposition 8. *Toute rotation se décompose en produit de deux symétries orthogonales, la première par rapport à une droite quelconque et la seconde par rapport à une droite faisant un angle $\alpha/2$ avec la première droite.*

DÉMONSTRATION. Soit (u, v) une base orthonormée directe de E. La matrice de le rotation d'angle α s'écrit dans cette base

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où la première matrice est celle d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite faisant un angle $\alpha/2$ avec u et la seconde est celle de la symétrie orthogonale par rapport à u. □

Corollaire 9. *Les symétries orthogonales engendrent $O(E)$.*

II. Espaces euclidiens de dimension 3

Soit E un espace euclidien de dimension 3, orienté par la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

II.1. Produit mixte.

Définition 10. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. Soient u, v et w trois vecteurs de E. Alors le déterminant de (u, v, w) dans $\mathcal{B}$, $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$ ne dépend pas de la base orthonormée choisie. Il est appelé* produit mixte *u, v et w, et est noté $[u, v, w]$.*

Donnons quelques propriétés du produit mixte.

$$\begin{array}{ccc} E^3 & \to & \mathbb{R} \\ (u, v, w) & \mapsto & [u, v, w] \end{array}$$

est une application *trilinéaire alternée*, ce qui signifie que l'application est linéaire par rapport à chacune des variables, qu'elle est antisymétrique lorsqu'on échange deux variables, et qu'elle est nulle si et seulement si (u, v, w) sont liés.

Si on note $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ les matrices colonnes des vecteurs u, v et w dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E alors

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

II.2. Produit vectoriel.

Si l'on développe le déterminant précédent par rapport à la troisième colonne on obtient

$$[u, v, w] = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

ce qui correspond au produit scalaire dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}$, de w de coordonnées $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ et du vecteur de coordonnées

$$\begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Définition 11. *Si u et v sont deux vecteurs de E, le vecteur défini comme ci-dessus est appelé* produit vectoriel *de u et v et est noté $u \wedge v$.*

D'après la construction ci-dessus on a $\forall w \in E$,

$$(u \wedge v, w) = (w, u \wedge v) = [u, v, w].$$

De plus l'application

$$\begin{array}{rcl} E^2 & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u \wedge v \end{array}$$

est bilinéaire alternée telle que $u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont liés.

Proposition 12. *Si u et v sont libres alors $u \wedge v$ appartient à $\mathrm{Vect}(u,v)^{\perp}$ (l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par u et v). De plus on a $(u, v, u \wedge v)$ forme une base directe de E.*

Démonstration. On a par définition

$$\begin{aligned} (u \wedge v, u) &= [u, v, u] = 0 \\ (u \wedge v, v) &= [u, v, v] = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre le premier point de la proposition. Soit maintenant $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. Par définition du produit mixte on a, en notant $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}' = (u, v, u \wedge v)$,

$$\det_{\mathcal{B}}(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) = [u, v, u \wedge v] = (u \wedge v, u \wedge v) = ||u \wedge v|| \geq 0$$

c'est-à-dire que $\mathcal{B}'$ est une base directe de E. □

Proposition 13. *Si u et v sont libres alors l'angle α formé par les vecteurs u et v est mesuré dans le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(u,v)$ et on a*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{(u,v)}{||u||\,||v||} \\ \sin(\alpha) &= \frac{[u,v,w]}{||u||\,||v||\,||w||} \end{aligned}$$

où w est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ avec lequel on oriente $\mathcal{P}$.

Démonstration. On pose $e_1 = u/||u||$, $e_3 = w/||w||$ et e_2 est un vecteur de $\mathcal{P}$ tel que (e_1, e_2, e_3) forme une base orthonormée directe de E, c'est-à-dire que $e_2 = e_3 \wedge e_1$. Comme v appartient à $\mathcal{P}$ et fait un angle α avec u et donc aussi avec e_1, on a $v/||v|| = \cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2$. D'où on obtient

$$\frac{(u,v)}{||u||\,||v||} = (e_1, \cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2) = \cos(\alpha)$$

et

$$\frac{[u,v,w]}{||u||\,||v||\,||w||} = \left[\frac{u}{||u||}, \frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||}\right] = [e_1, \cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2, e_3] = \sin(\alpha)$$

ce qui montre la proposition. □

Corollaire 14. *Si u et v sont libres alors $u \wedge v = ||u||\,||v|| \sin(\alpha) w$, où w est un vecteur unitaire normal à $\mathcal{P}$ avec lequel on oriente $\mathcal{P}$ et α est l'angle formé par les vecteurs u et v.*

Démonstration. Cela provient de la deuxième relation de la proposition précédente en prenant $w = u \wedge v$. □

Proposition 15. Formule du double produit vectoriel.

$$\forall u,\ v \text{ et } w \in E, \quad u \wedge (v \wedge w) = (u,w)v - (u,v)w.$$

DÉMONSTRATION. Cela ce montre directement en écrivant les formules en fonction des coordonnées dans une base orthonormée de E. □

II.3. Étude de $O_3(\mathbb{R})$.

On rappelle que si $M \in O_3(\mathbb{R})$ alors les seules valeurs propres possibles pour M sont 1 et -1.

Théorème 16.

Soit M une matrice de $O_3(\mathbb{R})$. Alors M est semblable *à l'une des deux matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{ou} \quad \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}).$$

DÉMONSTRATION. Soit E un espace euclidien de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B}$ orthonormée. On considère $f \in O(E)$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est la matrice M. Le polynôme caractéristique est de degré 3. Il a donc au moins une valeur propre qui est 1 ou -1. Soit e_3 un vecteur propre associé à cette valeur propre, de norme 1. On considère alors e_1 et $_2$ tels que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ forme une base orthonormée de E. Par conservation du produit scalaire, comme e_1 et e_3, et e_2 et e_3 sont orthogonaux, il en est de même pour $f(e_1)$ et $f(e_3)$, et $f(e_2)$ et $f(e_3)$. Or $f(e_3) = \pm e_3$, c'est-à-dire que $f(e_1) = ae_1 + be_2$ et $f(e_2) = ce_1 + de_2$. Donc la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

De plus comme $M \in O_3(\mathbb{R})$ on a $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$ c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}).$$

□

ÉTUDE DES DIFFÉRENTS CAS.

Premier cas : M est semblable à $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans (e_1, e_2, e_3).

On dit que f est une *rotation vectorielle* autour de $\mathrm{Vect}(e_3)$. Si l'espace est orienté et si on oriente $\mathrm{Vect}(e_3)$ par e_3 on dira que f est une rotation d'angle α autour de $\mathrm{Vect}(e_3)$. f appartient à $SO(E)$ ou encore M appartient à $SO_3(\mathbb{R})$.

Deuxième cas : M est semblable à $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans (e_1, e_2, e_3).

La restriction de f au plan engendré par e_1 et e_2 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Il existe donc une base orthonormée (e'_1, e'_2) dans laquelle la restriction de f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dans la base orthonormée (e_3, e'_1, e'_2) la matrice de f s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

f est donc une *symétrie orthogonale plane* par rapport au plan vectoriel $\mathrm{Vect}(e_3, e'_1)$, on dit encore que f est une *réflexion*. f appartient à $O^-(E)$ ou encore M appartient à $O_3^-(\mathbb{R})$.

Troisième cas : M est semblable à $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans (e_1, e_2, e_3).
La restriction de f au plan engendré par e_1 et e_2 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Il existe donc une base orthonormée (e_1', e_2') dans laquelle la restriction de f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Dans la base orthonormée (e_1', e_2', e_3) la matrice de f s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

f est donc une symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par $\mathrm{Vect}(e_1)$, ou encore f est une rotation d'angle π autour de $\mathrm{Vect}(e_1)$, on dit que f est un *retournement d'axe* $\mathrm{Vect}(e_1)$. f appartient à $SO(E)$ ou encore M appartient à $SO_3(\mathbb{R})$.

Quatrième cas : M est semblable à $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans (e_1, e_2, e_3).
On a donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

f est la composée commutative d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et d'une rotation d'angle α autour de e_3. f appartient à $O^-(E)$ ou encore M appartient à $O_3^-(\mathbb{R})$.
Si $\alpha \neq 0 \bmod 2\pi$, f n'a que le vecteur nul comme vecteur invariant, sinon $f = \mathrm{Id}_E$. Si $\alpha = \pi \bmod 2\pi$ alors $f = -\mathrm{Id}_E$, on dit que f est *une symétrie centrale* ou f est une *homothétie* de rapport -1

On obtient la conclusion suivante.

Proposition 17. *Soit $f \in O(E)$ alors, soit $f \in SO(E)$ et f est une rotation vectorielle (une droite invariante), soit $f \in O^-(E)$ et*

- *f est* une réflexion*, i.e. f est une symétrie plane (un plan invariant)*
ou

- *f est la composée des deux cas précédents (0 seul vecteur invariant).*

Remarquons que ce résultat signifie que les rotations et les réflexions engendrent $O(E)$.

II.4. Caractérisation des rotations.

Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté. On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E. Soit f un endomorphisme de E de matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ dans la base $\mathcal{B}$.

D'après la proposition précédente f est une rotation si et seulement si sa matrice vérifie

$${}^tM_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{I}_3 \quad \text{ et } \quad \det(M_{\mathcal{B}}(f)) = 1.$$

La première condition signifie que f est orthogonal, c'est-à-dire que f appartient à $O(E)$, et alors la deuxième précise ceci en disant que f appartient à $SO(E)$ ce qui caractérise bien les rotations de l'espace.

On suppose maintenant que f est une rotation de E et on va donner ses éléments caractéristiques.

a) L'axe de la rotation.
C'est l'ensemble des vecteurs invariants par f. Il est donc déterminé par l'équation

$$M_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

b) L'angle de la rotation.
Pour déterminer un angle il faut et il suffit de déterminer son cosinus et son sinus. Dans un premier temps on calcule la *trace* (= somme des coefficients diagonaux) de la matrice qui vérifie

$$\operatorname{tr}(M_{\mathcal{B}}(f))=1+2\cos(\alpha).$$

En effet $M_{\mathcal{B}}(f)$ est semblable à $\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et la trace de deux matrices semblables est identique.
Pour le sinus, on considère un vecteur e_3 qui est un vecteur directeur de l'axe de la rotation. On suppose que ce vecteur oriente l'axe. Soit alors e_1 un vecteur perpendiculaire à e_3, alors d'après les propriétés du produit mixte et du produit vectoriel on a

$$\sin(\alpha)=\frac{[e_1,f(e_1),e_3]}{||e_1||\,||f(e_1)||\,||e_3||}=\frac{[e_1,f(e_1),e_3]}{||e_1||^2\,||e_3||},$$

car une rotation préserve les normes.

c)Exemple.

On suppose que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Comme ${}^tMM=\mathrm{I}_3$ et $\det(M_{\mathcal{B}}(f))=1$, f est bien une rotation. Donnons ses éléments caractéristiques. Son axe est déterminé par

$$M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{ccc}y&=&x\\z&=&y\\x&=&z\end{array}\right.$$

C'est la droite de base $e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On suppose que ce vecteur oriente l'axe.

L'angle α de la rotation, vérifie $0=\operatorname{tr}(M)=1+2\cos(\alpha)$, i.e. $\cos(\alpha)=-1/2$. D'autre part, soit $e_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ un vecteur orthogonal à e_3. On a $f(e_1)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et

$$\sin(\alpha)=\frac{\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}}{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc $\alpha=-2\pi/3 \bmod 2\pi$.

Soient alors $e'_3=e_3/||e_3||$, $e'_1=e_1/||e_1||$ et $e'_2=e'_3\wedge e'_1$. Alors la matrice de f dans la base orthonormée directe (e'_1,e'_2,e'_3) est

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

II.5. Décomposition des rotations en produit de 2 réflexions.

Théorème 18.

> *Soit E un espace euclidien de dimension 3. On considère R la rotation de E d'angle α et d'axe Δ orienté par le vecteur unitaire e_3. Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel contenant e_3 ; on note S la réflexion par rapport à ce plan. Alors il existe une et une seule réflexion S' telle que $R = S' \circ S$. De plus S' est la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}'$ image de $\mathcal{P}$ par une rotation d'axe dirigé par e_3 et d'angle $\alpha/2$.*

Démonstration. Soit e_1 un vecteur unitaire orthogonal à e_3. On considère alors la base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) où $e_2 = e_3 \wedge e_1$. Dans cette base la matrice de la rotation R est $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus comme S est une symétrie orthogonale plane par rapport au plan $\mathcal{P}$ qui contient e_3, dans cette même base sa matrice est donnée par $\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\beta \in \mathbb{R}$. Si S' existe, on a $S' = R \circ S$, donc $S'(e_3) = e_3$. C'est-à-dire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que sa matrice dans (e_1, e_2, e_3) soit égale à $\begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient donc si S' existe

$$\begin{aligned} M(R) = M(S')M(S) &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma-\beta) & -\sin(\gamma-\beta) & 0 \\ \sin(\gamma-\beta) & \cos(\gamma-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\alpha = \gamma - \beta \bmod 2\pi$, ou encore $\gamma = \alpha + \beta \bmod 2\pi$. De plus si

$$M(S') = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & 0 \\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S' est bien une symétrie plane qui vérifie $R = S' \circ S$.
Le plan invariant pour la réflexion S est déterminé par le vecteur e_3 et, d'après l'étude des symétries dans O_2 par le vecteur u_1 de coordonnées $\begin{pmatrix} \cos\beta/2 \\ \sin\beta/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2, e_3). De même, le plan invariant pour S' est déterminé par e_3 et le vecteur u_2 de coordonnées $\begin{pmatrix} \cos(\beta+\alpha)/2 \\ \sin(\beta+\alpha)/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme e_3 est l'image de e_3 par la rotation d'axe dirigé par e_3 et d'angle $\alpha/2$ et que u_2 est l'image de u_1 par cette même rotation, on en déduit que le plan invariant de S' est l'image par cette rotation du plan invariant de S. □

Corollaire 19. *Les réflexions engendrent $O(E)$.*

II.6. Décomposition des rotations en produit de 2 retournements.

Théorème 20.

Soit E un espace euclidien de dimension 3. On considère R la rotation de E d'angle α et d'axe Δ orienté par le vecteur unitaire e_3. Soit Δ' une droite orthogonale à Δ ; on note $S_{\Delta'}$ le retournement par rapport à cette droite. Alors il existe un et un seul retournement $S_{\Delta''}$ telle que $R = S_{\Delta''} \circ S_{\Delta'}$. De plus $S_{\Delta''}$ est le retournement par rapport à la droite Δ'' image de Δ' par la rotation d'axe Δ et d'angle $\alpha/2$.

DÉMONSTRATION. Soit e_1 un vecteur unitaire orthogonal à e_3 qui dirige Δ'. On considère alors la base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) où $e_2 = e_3 \wedge e_1$. Dans cette base la matrice de la rotation R est $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus comme $S_{\Delta'}$ est un retournement par rapport à la droite Δ' dans cette même base sa matrice est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc si $S_{\Delta''}$ existe, on a

$$M(S_{\Delta''}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui est bien la matrice d'un retournement. De plus si $M(S_{\Delta''})$ est définie comme ci-dessus La restriction de $S_{\Delta''}$ à (e_1, e_2) est une symétrie orthogonale de O_2. Donc la droite invariante de $S_{\Delta''}$ est dirigée par le vecteur u de coordonnées $\begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \\ 0 \end{pmatrix}$ dans (e_1, e_2, e_3), c'est-à-dire par la droite Δ'' image de Δ' par la rotation d'axe Δ et d'angle $\alpha/2$. □

Index