Les documents, calculatrices et autres objets électroniques sont interdits. Le correcteur portera une attention toute particulière à la rédaction. Les exercices sont indépendants. Bon courage.

Exercice 1. On considère deux variables uniformes $X \sim \mathcal{U}_{[0,a]}$ sur l'intervalle $[0, a]$ $(a > 0)$ et $Y \sim \mathcal{U}_{[0,b]}$ sur l'intervalle $[0, b]$ $(b > 0)$ indépendantes.

1. Le couple (X, Y) est-il à densité ? Si oui, donner sa densité.

> **Solution:** Les variables X et Y sont à densité et indépendantes, donc le couple (X, Y) est aussi à densité avec, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
>
> $$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{a} 1_{]0,a[}(x) \frac{1}{b} 1_{]0,b[}(y).$$

On pose :

$$(U, V) = \left(XY, \frac{X}{Y} \right).$$

2. Le couple (U, V) est-il à densité ? Si oui, donner sa densité.

> **Solution:** Chercons la densité du couple (U, V). Soit h un fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on a :
>
> $$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(U, V)) = \mathbb{E}\left(h\left(XY, \frac{X}{Y} \right) \right) &= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(xy, \frac{x}{y} \right) f_{(X,Y)}(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{ab} \int_{]0,a[\times]0,b[} h\left(xy, \frac{x}{y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{ab} \int_{]0,a[\times]0,b[} h(\psi(x, y)) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$
>
> où ψ est l'application définie par,
>
> $$\forall (x, y) \in]0, a[\times]0, b[, \quad \psi(x, y) = \left(xy, \frac{x}{y} \right).$$
>
> Cette application est manifestement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, a[\times]0, b[$. Est-elle inversible ? Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(x, y) \in]0, a[\times]0, b[$ tel que
>
> $$\psi(x, y) = (u, v).$$
>
> En résolvant le système induit, on se rend compte qu'il existe une solution si, et seulement si, $u > 0$, $v > 0$, $uv < a^2$ et $\frac{u}{v} < b^2$ et dans ce cas
>
> $$(x, y) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}} \right).$$
>
> Notant $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ u > 0, \ v > 0, \ uv < a^2, \ \frac{u}{v} < b^2\}$, l'application ψ est donc bijective de $]0, a[\times]0, b[$ dans Δ. Son inverse est définie par,
>
> $$\forall (u, v) \in \Delta, \quad \psi^{-1}(u, v) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}} \right).$$

Elle est clairement de calsse $\mathcal{C}^1$ sur Δ. Le jacobien de cette inverse est donnée par :

$$\forall (u,v) \in \Delta, \quad J_{\psi^{-1}}(u,v) = -\frac{1}{2v}.$$

Au final, le changement de variable étant bien posé,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(U,V)) &= \frac{1}{ab}\int_{]0,a[\times]0,b[} h(\psi(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{ab}\int_{\Delta} h(u,v)\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(u,v)\frac{1}{2ab}\frac{1}{v}1_{\Delta}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

La densité du couple (U,V) est donc donnée, pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, par,

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2ab}\frac{1}{v}1_{\Delta}(u,v).$$

3. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Solution: L'ensemble Δ ne pouvant pas s'écrire sous forme produit (faire un dessin), la densité ne peut pas s'écrire sous forme produit et donc les variables U et V ne sont pas indépendantes.

4. Montrer que les variables aléatoires U et V ont pour densités respectives :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f_U(u) = -\frac{1}{ab}\ln\left(\frac{u}{ab}\right) 1_{]0,ab[}(u)$$

et

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad f_V(v) = \frac{a}{2bv^2}1_{]a/b,+\infty[}(v) + \frac{b}{2a}1_{]0,a/b[}(v).$$

Solution: Pour $u \in \mathbb{R}$, on calcule,

$$\begin{aligned} f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2ab}\frac{1}{v}1_\Delta(u,v)\mathrm{d}v &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2ab}\frac{1}{v}1_{u>0;v>0;uv<a^2;\frac{u}{v}<b^2}\mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2ab}\frac{1}{v}1_{u>0}1_{0<v<\frac{a^2}{u};v>\frac{u}{b^2}}\mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2ab}\frac{1}{v}1_{u>0}1_{0<v<\frac{a^2}{u};v>\frac{u}{b^2}}\mathrm{d}v 1_{\frac{u}{b^2}<\frac{a^2}{u}} \\ &= \int_{\frac{u}{b^2}}^{\frac{a^2}{u}} \frac{1}{2ab}\frac{1}{v}\mathrm{d}v 1_{\frac{u}{b^2}<\frac{a^2}{u}}1_{u>0} \\ &= \frac{1}{2ab}\left[\ln(v)\right]_{\frac{u}{b^2}}^{\frac{a^2}{u}} 1_{]0,ab[}(u) \\ &= \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{a^2b^2}{u^2}\right)1_{]0,ab[}(u) \\ &= \frac{1}{ab}\ln\left(\frac{ab}{u}\right)1_{]0,ab[}(u). \end{aligned}$$

D'où le résultat. Pour $v \in \mathbb{R}$, on a,

$$\begin{aligned} f_v(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2ab}\frac{1}{v}1_\Delta(u,v)\mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2ab}\frac{1}{v}1_{u>0;v>0;uv<a^2;\frac{u}{v}<b^2}\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2ab}\frac{1}{v}1_{v>0}1_{0<u<\min(\frac{a^2}{v},b^2v)}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2ab}\frac{1}{v}1_{v>0}\int_0^{\min(\frac{a^2}{v},b^2v)}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2ab}\frac{\min(\frac{a^2}{v},b^2v)}{v}1_{v>0}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

5. Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$.

Solution: On calcule,

$$\mathbb{E}(U) = \int_{\mathbb{R}} uf_U(u)\mathrm{d}u = -\int_0^{ab} u\ln\left(\frac{u}{ab}\right)\frac{\mathrm{d}u}{ab} = -ab\int_0^1 v\ln(v)\,\mathrm{d}v = -ab[\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)]_0^1 = \frac{ab}{4},$$

(on peut trouver la primitive par intégration par partie) et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U^2) &= \int_{\mathbb{R}} u^2 f_U(u)\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^{ab} u^2\ln\left(\frac{u}{ab}\right)\frac{\mathrm{d}u}{ab} = -(ab)^2\int_0^1 v^2\ln(v)\,\mathrm{d}v = -(ab)^2[\frac{x^3}{9}(3\ln(x)-1)]_0^1 = \frac{(ab)^2}{9}, \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2 = \frac{(ab)^2}{9} - \frac{(ab)^2}{16} = \frac{7(ab)^2}{144}$.

On suppose que $a = b = 1$ et on pose
$$N = \lfloor V \rfloor$$
où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

6. Quelles sont les valeurs possibles pour la variable aléatoire N ? Donner la loi de N.

Solution: V prenant ses valeurs dans $]0, \infty[$, N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ puisque N est la partie entière de V. On a, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(k \le V < k+1) = \int_k^{k+1} f_V(v)\mathrm{d}v &= \int_k^{k+1} \frac{1}{2v^2}1_{]1,+\infty[}(v) + \frac{1}{2}1_{]0,1[}(v)\mathrm{d}v \\ &= \int_k^{k+1} \frac{1}{2v^2}\mathrm{d}v \\ &= \left[-\frac{1}{2v}\right]_k^{k+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2k(k+1)}.\end{aligned}$$

Pour $k = 0$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(0 \le V < 1) = \int_0^1 f_V(v)\mathrm{d}v &= \int_0^1 \frac{1}{2v^2}1_{]1,+\infty[}(v) + \frac{1}{2}1_{]0,1[}(v)\mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

7. Est-ce que $N \in L^1$?

Solution: N étant presque sûrement positive, on a

$$\mathbb{E}(|N|) = \mathbb{E}(N) = \sum_{k\ge1} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k\ge1} k\frac{1}{2k(k+1)} == \sum_{k\ge1} \frac{1}{2(k+1)} = +\infty.$$

Donc N n'est pas dans L^1.

Exercice 2. Un homme rentre chez lui le soir et dispose d'un trousseau de k clés ($k \ge 2$). Lorsqu'il n'a pas bu, il essaie une clé au hasard puis, si le résultat est infructueux, il la met de côté et essaie une clé au hasard parmi celles restantes. À chaque insuccès, il répète ce procédé. Lorsque cet homme est ivre, il essaie une clé au hasard puis, à chaque insuccès il remet la clé avec les autres et choisit à nouveau une clé au hasard. On définit les événements suivants : $A =$ « l'homme n'a pas bu » et $B =$ « l'homme est ivre ».

1. Dans toute cette question on suppose que l'homme est ivre. On note X_B la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires à l'homme pour parvenir à ouvrir sa porte quand il est ivre. Quelle est la loi de X_B ?

2. Dans toute cette question on suppose que l'homme n'a pas bu. On note X_A la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires à l'homme pour parvenir à ouvrir sa porte quand il n'a pas bu. Calculer $\mathbb{P}(X_A = 1)$, $\mathbb{P}(X_A = 2)$ et $\mathbb{P}(X_A = 3)$. Quelle est la loi de X_A ?

3. On suppose maintenant que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Calculer la probabilité p_n que l'homme soit ivre, sachant qu'il est parvenu à ouvrir sa porte au terme d'exactement n essais ($n \in \mathbb{N}^*$). (On pensera à distinguer les cas où $n \leqslant k$ et $n > k$.)