IUT de Bordeaux
Département **GMP** *2nde année*

01/04/2015

Evaluation de Mathématiques

Durée : 2h

L'usage de tout document est interdit. La calculatrice est autorisée.

Toute réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Exercice 1

On considère la courbe paramétrée

$$\mathcal{C}\begin{cases} x(t) = & \cos(t) \quad +3\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y(t) = & \sin(t) \end{cases}$$

1. Déterminer la période de $\mathcal{C}$.
2. Donner la parité des fonctions coordonnées x et y.
3. a) Préciser le domaine de définition de $\mathcal{C}$.
   b) Déterminer le domaine d'étude réduit $\mathcal{D}_e$ de la courbe en donnant les transformations géométriques permettant de reconstruire la courbe $\mathcal{C}$.
4. a) Donner les valeurs de $t \in [0, 2\pi]$ pour lesquelles y' s'annule.
   b) On suppose que $t \in]0, 2\pi[$. En utilisant la formule $\sin(a+b) = 2\sin(a)\cos(b)$, montrer que $x'(t) = 0$ si et seulement si
   $$t = 2\arccos\left(\frac{-3}{4}\right).$$
   On justifiera avec soin l'utilisation de la fonction arccos. Dans la suite, on note $t_1 = 2\arccos\left(\frac{-3}{4}\right)$.
   c) Justifier que $x'(t) \geq 0 \iff t \geq t_1$.
5. On admet que $\frac{3\pi}{2} < t_1 < 2\pi$. Dresser le tableau de variations de $\mathcal{C}$.
6. (a) Placer les points $M(0)$, $M(\pi/2)$, $M(\pi)$, $M(t_1)$ où $x(t_1) = -2{,}12$ et $y(t_1) = -0{,}99$, et $M(2\pi)$.
   (b) Placer les vecteurs tangents en $M(0)$, $M(\pi/2)$, $M(\pi)$, $M(t_1)$ et $M(2\pi)$.
   (c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2

On considère la courbe en coordonnées polaires $\mathcal{C}$ donnée par

$$\rho(\theta) = \cos(3\theta) - 1 \;\text{ pour }\; \theta \in \mathbb{R}.$$

1. Soit $M(\theta) \in \mathcal{C}$. Calculer le vecteur tangent au point $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.
2. Donner les valeurs de $\rho(0)$ et $\rho'(0)$. Que peut-on en déduire sur le point $M(0)$?
3. Justifier la nature du point $M(0)$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée

$$\mathcal{C}\begin{cases} x(t) &= 2t+1 \\ y(t) &= t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Donner la dérivée de l'abscisse curviligne en fonction de t.
2. Calculer le rayon de courbure R en fonction de t.
3. Donner le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$ à $\mathcal{C}$ au point $M(1)$.
4. Déterminer les coordonnées du centre de courbure en $t = 1$.

Exercice 4

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^2$. On se place dans le plan muni du repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note s l'abscisse curviligne et $\overrightarrow{T}$ le vecteur tangent unitaire. On admet qu'il existe $\alpha : s(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{T} = \cos(\alpha)\overrightarrow{i} + \sin(\alpha)\overrightarrow{j}.$$

1. A quel angle correspond α?
2. Montrer que $\tan(\alpha) = \frac{y'}{x'}$.
3. En dérivant l'expression de $\tan(\alpha)$, exprimer $\dfrac{d\,\alpha}{dt}$ en fonction de x', y', x'' et y''.
4. Montrer que $R = \dfrac{d\,s}{d\,\alpha}$. *On utilisera l'égalité* $\dfrac{d\,s}{d\,\alpha} = \dfrac{d\,s}{d\,t}\dfrac{d\,t}{d\,\alpha}$.

Exercice 5

Soit $\mathcal{C}$ une courbe en coordonnées polaires de rayon polaire ρ. On dispose des informations suivantes :

- le domaine d'étude restreint de ρ est $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,
- une symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Oy) permet de retrouver la courbe sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
- la symétrie centrale par rapport à l'origine O du repère effectuée sur la courbe tracée pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ permet d'obtenir l'intégralité de la courbe,
- le tableau de variations de ρ est

θ	0 $\frac{\pi}{2}$
ρ'	$+$
ρ	$0 \nearrow +\infty$

- la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe et la courbe se situe à gauche de son asymptote.

1. Positionner les points $M(0)$ et $M(\pi/4)$ de rayon polaire $\rho(\pi/4) = 1$.

   On rappelle que la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$ est la droite d'équation cartésienne $y = x$.

2. Positionner le vecteur tangent en $M(0)$.
3. Tracer la courbe pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Tracer, à l'aide des symétries orthogonale et centrale indiquées précédemment, l'intégralité de la courbe.

Formulaire

Courbes paramétrées $\mathcal{C} : t \longmapsto (x(t), y(t))$

Points singuliers si $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = \overrightarrow{0}$, $M(t_0)$ est un point singulier. Pour les entiers p et q,

- p impair, q pair : $M(t_0)$ est un point ordinaire,
- p impair, q impair : $M(t_0)$ est un point d'inflexion,
- p pair, q impair : $M(t_0)$ est un point de rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce,
- p pair, q impair : $M(t_0)$ est un point de rebroussement de 2^{nde} espèce.

Equation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$: $y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$.

Courbes en coordonnées polaires $\mathcal{C} : \theta \longmapsto \rho(\theta)$

Vecteur dérivé : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta + \rho(\theta)\overrightarrow{v}_\theta$, où $\overrightarrow{u}_\theta = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}_\theta = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j}$.

Points singuliers : si $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$, alors $M(\theta)$ est l'origine O du repère.

– Si ρ ne change pas de signe, $M(\theta)$ est un point de rebroussement de première espèce,

– si ρ change de signe, $M(\theta)$ est un point ordinaire.

Aspect métrique des courbes

Rayon de courbure : pour $\mathcal{C} : t \in I \longmapsto (x(t), y(t))$,$R = \dfrac{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} = \dfrac{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}$.

Pour $\mathcal{C} : \theta \in I \longmapsto \rho(\theta)$, $R = \dfrac{\left(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2\right)^{3/2}}{\rho(\theta)^2 + 2\rho'(\theta)^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta)}$.

Courbure : $c = \frac{1}{R}$. **Formules de Frenet** $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = c\overrightarrow{N}$ et $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -c\overrightarrow{T}$ avec c courbure.

Centre de courbure : Ω tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N}$ avec $\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$.

Cercle osculateur à $\mathcal{C}$ en $M(t)$: cercle de centre le centre de courbure Ω et de rayon $|R|$.

Courbes de Bézier : si P_i a pour coordonnées (x_i, y_i) pour $i = 1, \ldots, n$, une représentation paramétrique de la courbe de Bézier de points de contrôle $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ est

$$\mathcal{C}\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \sum_{i=0}^{n} B_i(t)x_i \\ y(t) & = & \sum_{i=0}^{n} B_i(t)y_i \end{array}\right. , \; t \in [0,1],$$

où $B_i(t) = \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i}$, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, $0 \leq i \leq n$.

Rappels sur la fonction arccos :

La fonction arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ est **strictement décroissante** sur $[-1,1]$.
Si $x = \cos(y)$ avec $x \in [-1,1]$ et $y \in [0,\pi]$ alors $y = \arccos(x)$.

Primitive à une constante près	Fonction (de la variable x)	Primitive à une constante près	Fonction (de la variable x)
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
$\ln(\|x\|)$	$\frac{1}{x}$	$\ln \|u\|$	$\frac{u'}{u}$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$	x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$	$u'u^\alpha$, $\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(u)$	$u'\mathrm{ch}(u)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(u)$	$u'\mathrm{sh}(u)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(u)$	$u'\sin(u)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$-\cos(u)$	$u'\sin(u)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(u)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(u)$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$