INTERROGATION # 1 – LE 10/11/2016, 30 MINUTES

Une attention particulière sera accordée à la rédaction de l'exercice 1.

EXERCICE 1 (COURS)

Soit $n \geqslant 1$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de format $n \times n$ et à coefficients dans $\mathbf{R}$.

1) (2 points) Définir les lois d'addition $+$ et de multiplication interne $\times$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
On admet que $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), +, \times)$ est un anneau.

2) (4 points) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbf{Q})$, l'ensemble des matrices de format $n \times n$ et à coefficients dans $\mathbf{Q}$, est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), +, \times)$.

3) (4 points) Déterminer l'ensemble de ses éléments inversibles noté $\mathscr{GL}_n(\mathbf{Q})$.
⋈ RAPPEL – On pourra se servir d'une formule explicite pour l'inverse d'une matrice. ⋈

EXERCICE 2

1) (1 point) Soient A_1 et A_2 deux matrices carrées. Que vaut $\det(A_1 \times A_2)$?

2) On considère maintenant $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$.

a. (2 points) Calculer de deux manières différentes le scalaire

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}.$$

b. (2 points) En déduire une identité appelée *identité de Lagrange*.

Vos réponses