ANNEE UNIVERSITAIRE 2014 / 2015
S1 D'AUTOMNE
PARCOURS : MA300
Code UE : N1MA3W01
Epreuve : Algèbre 2
Date : 06 Janvier 2014 Heure : 14h-17h
Durée : 3h
Documents : non autorisés
Epreuve de M : Sueur
Collège Sciences et technologies

Exercice 0 **(sur** 6 **points)**

1. Calculer les valeurs et vecteurs propres des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6000 & 80008 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(R)$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

3. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 1 (sur 8 points)

Soit A une matrice carrée complexe de taille n. On note λ_i, pour $i = 1, \ldots, l$, ses valeurs propres distinctes, de multiplicité α_i, où $i = 1, \ldots, l$.

1. En trigonalisant A sur $\mathbb{C}$ montrer que pour tout entier naturel k,
$$\text{Tr }(A^k) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \lambda_i^k.$$
2. Soit B une autre matrice carrée complexe de taille n. On note μ_i, pour $i = 1, \ldots, m$, les valeurs propres distinctes de B de multiplicité β_i.

   On suppose que
$$\Pi_{1 \leqslant i \leqslant l} \, (1 - \lambda_i X)^{\alpha_i} = \Pi_{1 \leqslant i \leqslant m} \, (1 - \mu_i X)^{\beta_i}.$$
   Montrer que les polynômes caractéristiques de A et B coïncident.
3. On suppose maintenant que la matrice A est réelle symétrique. Exprimer
$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j})^2$$
   en fonction de Tr (A^k) pour un entier k approprié.

Exercice 2 (sur 4 points)

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

1. Montrer que pour tout u, v dans E,
$$\frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$
2. Soit A une application linéaire continue de E vers E symétrique i.e. tel que pour tout u, v dans E,
$$< u, A(v) > = < A(u), v > .$$
   Montrer que pour tout u, v dans E,
$$4 < Au, v > = < A(u+v), u+v > - < A(u-v), u-v > .$$

Exercice 3 (sur 4 points)

On fixe un entier d et on considère $p_1, \ldots, p_n$ dans l'espace $\mathbb{R}^d$ qui est muni de la norme euclidienne. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ notons $f_i \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction

$$x \mapsto 1 - \|x - p_i\|^2.$$

Montrer que l'espace engendré par les f_i est de dimension au plus $d + 2$.

Exercice 4 (sur 13 points)

On considère

- un espace vectoriel réel E de dimension finie n,
- une forme quadratique q sur E de signature $(n-1, 1)$,
- un sous-espace vectoriel F de E de dimension p.

On suppose qu'il existe v dans F tel que $q(v) < 0$ et on note D la droite vectorielle engendrée par v.

1. Montrer que $E = D \oplus D^\perp$.
2. Montrer que la restriction de q à $D^\perp$ est définie positive ?
3. Montrer que $F \cap D^\perp$ est de dimension $p - 1$? On pourra considérer D' l'orthogonal de D dans F et s'inspirer de la première question.
4. Quelle est la signature de la restriction de q à F ?
5. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$.