Feuille d'exercices 8

Exercice 1. Soit a un nombre réel et $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique définie par :

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall v = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(u, v) = xx' + 2xy' + 2x'y + ayy'.$$

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles φ est un produit scalaire.

Exercice 2. Soit $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3$ une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$. Q définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}^0([a, b])$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $[a, b]$.

1. Montrer que $\varphi : \mathcal{C}^0([a, b]) \times \mathcal{C}^0([a, b]) \to \mathbb{R}$ avec $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$, définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b])$. Déterminer la norme euclidienne associée.

2. En déduire les relations suivantes :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)\left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)$$

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

Préciser dans quel cas ces inégalités sont des égalités.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire φ. On note N la norme associée à φ. Montrer que :

1. $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $N^2(x + y) + N^2(x - y) = 2[N^2(x) + N^2(y)]$; c'est l'identité du parallélogramme.

2. $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $N(x) = N(y) \iff \varphi(x + y, x - y) = 0$; un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

Exercice 5. Déterminer une base othonormée du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 0)$ et $u_3 = (0, 2, 3, 1)$.

Exercice 6. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on définit la forme bilinéaire suivante : pour tout $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(u, v) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3$ muni de φ est un espace euclidien.

2. Donner dans la base canonique, la matrice du produit scalaire φ.

3. Former, par la méthode d'orthonormalisation de Schmidt, une base orthonormée à partir de la base canonique.

Exercice 7. 1. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit H l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ où $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ appartient à $\mathbb{R}^n$. Déterminer l'orthogonal $H^\perp$ de H.

2. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 0 \\ x + y + 5z = 0 \end{cases}$.

Déterminer l'orthogonal $P^\perp$ de P.

Exercice 8. On suppose que E est de dimension $n \geq 2$ et on considère λ un réel et un vecteur non nul $u \in E$. On note f l'application de E dans E définie par $f(x) = x + \lambda(x, u)u$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Pour quelles valeurs de λ, f est-il un endomorphisme orthogonal ?

3. On suppose $\lambda \neq 0$ et f orthogonal. Calculer $f(u)$ et $f(x)$ lorsque $(x, u) = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 9. Soit u un endomorphisme symétrique de E, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans la base B.

1. Montrer que $(u(e_i), e_j) = a_{i,j}$. Que peut-on dire de la matrice A ?

2. Montrer que les sous-espaces propres de u sont orthogonaux. En déduire qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Exercice 10. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 - 8x_2x_3 + 2x_3x_1 - 4x_1x_2$. On note f sa forme polaire associée et A sa matrice dans la base canonique.
1. Déterminer A et une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.
2. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (pur le produit scalaire usuel) qui est une base orthogonale pour q. Rappeler 2 autres méthodes pour construire des bases orthogonales pour q.

Exercice 11. On considère l'espace vectoriel euclidien E des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3, muni du produit scalaire $(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)dx$.
1. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$.
2. Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur $\text{Vect}(1, X, X^2)$.
3. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\int_0^1 [x^3 - (ax^2 + bx + c)]^2 dx = \inf \left\{ \int_0^1 [x^3 - (dx^2 + ex + f)]^2 dx,\ (d, e, f) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 12. On considère un espace euclidien E et on note p un projecteur de E c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un projecteur symétrique.

Exercice 13. Soit E un espace euclidien. Pour a un vecteur non nul de E on note $D = \text{Vect}(a)$. On considère alors p la projection orthogonale sur D, q la projection orthogonale sur $D^\perp$ et s la symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$. Montrer que pour tout $x \in E$

$$p(x) = \frac{(x, a)}{||a||^2}a; \qquad q(x) = x - \frac{(x, a)}{||a||^2}a \quad \text{et} \quad s(x) = x - 2\frac{(x, a)}{||a||^2}a.$$

Exercice 14. Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On considère H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x - 2y + 4z + 2t = 0$ et p la projection orthogonale sur H.
1. Calculer $||u - p(u)||$ pour tout $u \in \mathbb{R}^4$.
2. Quelle est la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?
3. Déterminer une base orthonormale dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 15. Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On considère les vecteurs $u_1 = (2, 1, 0, 2)$, $u_2 = (-4, 1, 0, -1)$, $u_3 = (1, 4, -3, -1)$ et $u_1 = (9, 9, 5, -9)$ de $\mathbb{R}^4$ et P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1 et u_2. Soient p la projection orthogonale sur P et s la symétrie orthogonale par rapport à P.
1. Vérifier que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Orthonormaliser cette base selon le procédé de Schmidt.
3. Déterminer la matrice de p puis celle de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 16.
1. Soit A une matrice symétrique positive. Montrer que pour tout $k \geq 1$, tout vecteur propre de A^k est un vecteur propre de A.
2. Soient A et B deux matrices symétriques positives. Montrer que s'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = B^k$ alors $A = B$.
3. Soit A une matrice symétrique réelle définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique réelle définie positive M telle que $M = N^2$.