Algèbre linéaire **Année 2016-2017**

Groupes & anneaux

Généralités sur les groupes

Exercice 1 (Entiers modulo n)**.** Étant donné un entier naturel n, on appelle classe d'un entier relatif p modulo n l'ensemble $\overline{p} = \{p + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble des classes modulo n est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Écrire la liste des éléments distincts de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
2. Montrer que si $x \in \overline{p}$ et $y \in \overline{q}$, alors $x + y \in \overline{p+q}$ et $xy \in \overline{pq}$.
3. En posant $\overline{p}+\overline{q} = \overline{p+q}$ et $\overline{p}\cdot\overline{q} = \overline{pq}$, on définit deux lois de composition, addition et multiplication sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   Écrire la table d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
   S'agit-il de lois de groupe ?

Même question pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montre que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Exercice 3. On munit l'ensemble $G = \{a, b, c, d\}$ d'une loi de composition interne dont la table de Pythagore est

$\star$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	c	a	c	a
b	a	d	c	b
c	c	c	c	c
d	a	b	c	d

(La première ligne se lit $a \star a = c$, $a \star b = a$, $a \star c = c, \ldots$)

1. Cette loi possède-t-elle un élément neutre ?
2. Cette loi est-elle commutative ?
3. Cette loi est-elle associative ?
4. Est-ce une loi de groupe ?

Exercice 4. Déterminer le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par les entiers 24, 36 et -54.

Exercice 5. Soit le groupe $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Déterminer le sous-groupe H de G engendré par $\overline{6}$ et $\overline{8}$ et déterminer son ordre.
2. Caractériser les générateurs de G.
3. Quel est l'ordre de l'élément $\overline{9}$?

Exercice 6. Soient G un groupe et $x \in G$ un élément d'ordre n. Quel est l'ordre de x^2 ?

Exercice 7. Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Groupes de permutations

Exercice 8. Soit σ_1 et σ_2 les permutations suivantes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les signatures de σ_1, σ_2, σ_1^{-1} et $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Exercice 9. Trouver la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, la signature, l'ordre et une décomposition en produit de transpositions des permutations suivantes de S_{10} :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 & 9 & 8 & 5 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\varphi = (10,3,4,1)\,(8,7)\,(4,7)\,(5,6)\,(2,6)\,(2,9)\,.$$

Calculer σ^{1998} et φ^{1998}.

Exercice 10. On désigne par $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation σ.

1. Montrer que l'on a $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) = 0$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\sigma(1)\sigma(2)$. (Indication : remplacer σ par $\sigma\circ(1,2)$).

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^n$, on désigne par $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique. A une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe l'endomorphisme u_σ de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$\begin{array}{cccc} & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ u_\sigma \ : & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $\tau = (ij)$ une transposition. Écrire la matrice de u_τ dans la base canonique. Montrer que $\forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n,\ u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma\circ\sigma'}$.

Anneaux

Exercice 12.

1. Montrer que $\overline{k}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si les entiers k et n sont premiers entre eux.
2. On pose $n = 10$ et soit G le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (a) Donner la liste des éléments de G.
   (b) Quel est l'ordre de $\overline{3}$? G est-il cyclique ?

Exercice 13 (Bac 1978)**.** Soit l'anneau $A = \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

1. Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau A.
2. Résoudre dans A l'équation $x^2 + \overline{2}x - \overline{3} = \overline{0}$.

Exercice 14. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x + y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

Exercice 15 (Anneau de Boole)**.** Soit E un ensemble fini et $A = \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $(A, \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?
2. Soit I un idéal de A. Montrer que : $\begin{cases} \forall\ X \in I,\ \forall\ Y \subset X,\ \text{on a } Y \in I \\ \forall\ X, Y \in I,\ \text{on a } X \cup Y \in I. \end{cases}$
3. En déduire que $I = \mathcal{P}(E')$ avec $E' \subset E$.
4. Étudier la réciproque.
5. Si E est infini, montrer que $I = \{\text{parties finies de } E\}$ est un idéal qui n'est pas de la forme $\mathcal{P}(E')$.

Exercice 16 (Entiers de Gauss)**.** Soit $A = \{a + bi \text{ tq } a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Quels sont les éléments inversibles ?
2. Soient $u, v \in A$ avec $v \neq 0$. Montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que $u = qv + r$ et $|r| < |v|$. A-t-on unicité ?
3. Montrer que A est principal.