Liste d'exercices n^o 1

(Permutations, algèbre linéaire et multilinéaire, déterminants)

Groupe symétrique, signature

Exercice 1
Soit σ_1 et σ_2 les permutations suivantes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les signatures de σ_1, σ_2, σ_1^{-1} et $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Exercice 2
Trouver toutes les permutations de trois éléments ainsi que leurs signatures. En déduire une formule pour calculer le déterminant d'une matrice 3×3.

Exercice 3
Dans $\mathfrak{S}_4$ écrire la permutation $(1, 2, 3)$ comme une composition de plusieurs transpositions (i, j). Faire de même avec $(1, 2, 3, 4)$.

Exercice 4
Montrer que l'on a $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = 0$. Ici, $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.

Multilinéarité

Exercice 5
Déterminer si les applications suivantes de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont bilinéaires

1. $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1$;
2. $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2$;
3. $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$;
4. $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2$.
5. $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_2 - 3x_2y_1$.

Exercice 6
Trouver toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis toutes les applications bilinéaires de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver toutes les applications bilinéaires de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Premiers calculs de déterminant

Exercice 7
Soit A une matrice de taille n, avec n impair, telle que la transposée de A est égale à $-A$. Que peut-on dire sur le déterminant de A?

Exercice 8
Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

est divisible par 17.

Exercice 9
Montrer que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer.

Exercice 10
Montrer que, avec des coefficients arbitraires $a, b, c, , ..., p$, le déterminant suivant est égal à 0 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ g & h & i & j & k \\ l & m & n & o & p \end{vmatrix}$$

Exercice 11
Calculer le déterminant suivant si la matrice est de taille n.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 12
Soit S la matrice 5×5 à coefficients réels : $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer det (S). Déterminer S^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux sous espaces vectoriels E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^5$ de dimension respective 2 et 3 tels que : $\mathbb{R}^5 = E_1 \oplus E_2$ et $S(E_1) \subset E_1$ $S(E_2) \subset E_2$.