Complément sur le déterminant

Exercice 1 Calculer les détermiants suivants où les matrices sont de taille $n \times n$

$$\det(a_i b_j) \ ; \ \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix}$$

Calcul des inverses des matrices

Exercice 2 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles dans $\mathbb{R}$. Le cas échéant trouvez les cofacteurs et l'inverse de la matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soit A la matrice $A = (a_{ij})$ où

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Justifier que A est inversible et calculer son inverse. On peut chercher à résoudre un système.

Matrice d'une application linéaire

Exercice 4 On considère dans $\mathcal{M}_{4,3}$ la matrice K telle que $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3), \mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$. Trouver une application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ telle que $\mathcal{M}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = K$. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{rang}(K)$. L'application u est-elle injective?

Exercice 5 Trouver les matrices des applications suivantes. Lesquelles sont inversibles? Si possible, trouver leurs inverses (par la méthode de votre choix).

1. $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad f(x, y, z) = (x, y, 0);$
2. $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad f(x, y, z) = (\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}});$
3. $F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad f(x, y, z) = (z, x, y).$
4. $L : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 : \quad L(p) = (p(1), p(0), p(-1))$(utiliser la base $(1, X, X^2)$ pour $\mathbb{R}_2$.

Exercice 6 Trouver les vecteurs et valeurs propres pour les applications F_1, F_2, F_3 du dernier exercice.

Exercice 7

1. Montrer que si
$$A^n + A^{n-1} + \cdots + A + I = 0$$
la matrice A est inversible et trouver A^{-1}

2. Trouver les inverses de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

Exercice 8 Soient A et B deux matrices inversibles.

1. Leur somme est-elle inversible? Si oui,trouver l'inverse. Si non,trouver un exemple de A et B tels que $A + B$ n'est pas inversible.

2. Leur produit est-il inversible? Si oui, trouver l'inverse. Si non, trouver un exemple de A et B tels que AB n'est pas inversible.

3. Le produit A^2B^3A est-il inversible? Si oui,trouver l'inverse.