Matrices et leurs inverses

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer en fonction de n et des termes initiaux les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par u_0, v_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n + v_n ; v_{n+1} = 5u_n - 2v_n.$$

Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base naturelle (e_1, e_2, e_3) par

$$f(e_1) = -e_1 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 - e_2, \quad f(e_3) = e_2 - e_3.$$

Cet endomorphisme est-il diagonalisable?

Exercice 3 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f - \lambda I$ soit non injectif.

Exercice 4 Soient A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver les vecteurs propres et valeurs propres de A.
2. Trouver une formule pour A^n.

Exercice 5 Trouver une 2×2 matrice A avec valeurs propres 2 et 3; 2-vecteur propre (1,3) et 3-vecteur propre (6,-1). Quels sont les vecteurs propres et valeurs propres de A^{100}?

Exercice 6 Montrer que, si λ est un valeur propre pour A alors $\lambda + 1$ est un valeur propre pour $A + I$. Qu'est-ce que on peut dire pour $A + A^n$? Si B est n'importe quelle autre matrice,qu'est-ce qu'on peut dire sur les valeurs propres de $A + B$?

Exercice 7 Trouver les éléments propres (vecteurs propres et valeurs propres) des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables ? Si c'est le cas, déterminer une base de diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & -1 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Exercice 9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u_1, \cdots, u_n$ des endomorphismes de E. On suppose que les u_i commutent deux à deux (i.e $\forall i, j\ u_i u_j = u_j u_i$) et sont tous diagonalisables. Montrer qu'il existe une base de E qui diagonalise tous les u_i.

Exercice 10 Soit A une matrice vérifiant

$$A^3 = A^2 + 4A - 4$$

Montrer que A est diagonalisable.