Algèbre linéaire — Année 2016-2017

Déterminants

Exercice 7: correction

1) Si $a_i = b_j$ pour $i \neq j$ alors les lignes i et j sont égales et $\mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_n, b_n)$ s'annule. Même conclusion si $b_i = b_j$ pour $i \neq j$ puisque cette fois ce sont les colonnes d'indices i et j qui sont égales. On supposera donc désormais que les a_i sont tous distincts, de même que les b_j.

2) En développant le déterminant $\mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_{n-1}, b_{n-1}, a_n, z)$ par rapport à la dernière colonne, on constate que

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i,n}}{z + a_i}, \tag{1}$$

avec $\Delta_{i,n} = (-1)^{n+i-2}\mathcal{C}(a_1, b_1, ...a_{i-1}, b_{i-1}, a_{i+1}, b_i, ..., a_n, b_{n-1})$ est le cofacteur d'indice (i, j) et ne dépend pas de la variable z. On constate que $f(z)$ est bien définie en dehors de $\{-a_1, ..., -a_n\}$. En réduisant tous les termes de la somme au même dénominateur $Q = \prod_{i=1}^{n}(z+a_i)$, $f(z)$ s'écrit sous la forme d'une fraction rationnelle en z dont le dénominateur est unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré n et le numérateur de degré au plus $n-1$. Ainsi, si α est le coefficient dominant du numérateur, on a bien $f(z) = \alpha\frac{P(z)}{Q(z)}$, où $\alpha \in \mathbb{C}^\star$, P, et Q sont unitaires, $\deg P \leq n-1$, $\deg Q = n$. Sur l'expression factorisée de Q il est clair que $-a_1, ..., -a_n$ sont les racines de Q. Quand à P, il s'annule exactement pour les $z \in \mathbb{C} \setminus \{-a_1, ..., -a_n\}$ tels que $f(z)$ s'annule. Or pour tout $1 \leq i \leq n-1$, si on prend $z = b_i$ dans le déterminant définissant $f(z)$, les colonnes d'indices i et n se trouvent égales, ce qui implique que $f(z)$ et donc P s'annule en chacun des b_i pour $1 \leq i \leq n-1$. Les b_i, $1 \leq i \leq n-1$ étant supposés distincts, ce sont bien les $n-1$ racines de P (qui est donc de degré $n-1$ exactement).

3) En revenant à l'expression (1) de $f(z)$ on écrit

$$(z + a_n)f(z) = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{i,n}\frac{z + a_n}{z + a_i} + \Delta_{n,n},$$

d'où on déduit, puisque $\Delta_{n,n} = \mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_{n-1}, b_{n-1})$,

$$\lim_{z \to -a_n}(z + a_n)f(z) = \mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_{n-1}, b_{n-1}).$$

D'autre part, on sait par la question 2) que $P = \prod_{i=1}^{n-1}(z - b_i)$ et $Q = \prod_{i=1}^{n}(z + a_i)$, d'où

$$(z + a_n)f(z) = \alpha\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(z - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(z + a_i)},$$

et donc

$$\lim_{z \to -a_n}(z + a_n)f(z) = \alpha\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n + b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)}.$$

Ainsi

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n + b_i)}\mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_{n-1}, b_{n-1}).$$

4) Grâce aux 2) et 3) on établit la relation de récurrence

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_n, b_n) &= f(b_n),\\ &= \alpha\frac{P(b_n)}{Q(b_n)},\\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n + b_i)\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)}\mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_{n-1}, b_{n-1}).\end{aligned}$$

En notant que $\mathcal{C}(a_1, b_1) = \frac{1}{a_1+b_1}$, on conclut que

$$\mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_n, b_n) = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(b_j - b_i)}{\prod_{1\leq i\neq j\leq n}^{n-1}(a_n + b_i)}.$$

Exercice 8: correction

1) On a $\mathbf{C}_n[X] \subset \mathbf{C}[X]$, et si $(P, Q) \in \mathbf{C}_n[X]^2$, on vérifie que : $0 \in \mathbf{C}_n[X]$, et que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$, $\lambda P + \mu Q \in \mathbf{C}_n[X]$.
Une $\mathbf{C}$-base de $\mathbf{C}_n[X]$ est $(1, X, ..., X^n)$. On vérifie ensuite que

$$(0, 1), (0, X), ..., (0, X^n), (1, 0), (X, 0), ..., (X^m, 0)$$

engendre $\mathbf{C}_n[X] \times \mathbf{C}_m[X]$. C'est donc un espace vectoriel de dimension $n + m + 2$. Mais dans la suite on travaillera plutôt avec $\mathcal{B}_0$ définie dans l'énoncé, une version réordonnée.

2) Soit $(U, V) \in \mathbf{C}_{m-1}[X] \times \mathbf{C}_{n-1}[X]$. Alors UP et VQ sont de degré $m - 1 + n$, donc $u_{P,Q}(U, V) \in \mathbf{C}_{n+m-1}[X]$.
Soit $l \in \{0, ..., m - 1\}$. Calculons $u_{P,Q}(X^l, 0) = X^l P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{i+l}$, on récupère donc la colonne l de la matrice, et même chose pour l'autre partie.
Finalement, la matrice de $u_{P,Q}$ relativement aux base $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ est la matrice dite de *Sylvester* suivante:

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & & 0 & b_0 & & 0\\ a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 & & \\ a_2 & a_1 & & & \vdots & \dots & \\ \vdots & a_2 & & 0 & & & \\ a_n & \vdots & & a_0 & b_{m-1} & & \\ 0 & a_n & & \vdots & b_m & & b_0\\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & a_{n-1} & & & b_{m-1}\\ 0 & 0 & & a_n & & & b_m \end{pmatrix}.$$

Elle est de format $(m + n) \times (m + n)$

3) On note $P = aX^2 + bX + c$, et $P' = 2aX + b$. Comme $\deg(P) = 2$ $(n = 2)$ et $\deg(P') = 1$ $(m = 1)$, le résultant de P et P' est le déterminant d'une matrice de format 3×3. Et plus précisément : $Res(P, P') = \begin{vmatrix} c & b & 0\\ b & 2a & b\\ a & 0 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b & 0\\ 0 & 2a & b\\ -a & 0 & 2a \end{vmatrix} = 4a^2c - ab^2$. On en déduit

$\Delta(P) = (-1)^1 \frac{1}{a}(4a^2c - ab^2) = b^2 - 4ac$. On retrouve la valeur du discriminant connu depuis le lycée.
De-même si $Q = X^3 + pX + q$, $Q' = 3X^2 + p$ avec $p, q \in \mathbf{C}$. On forme le déterminant de la matrice de format 5×5 suivante, puis en développant selon la dernière ligne:
$Res(Q, Q') = \begin{vmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 \\ p & q & 0 & p & 0 \\ 0 & p & 3 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} q & p & 0 & 0 \\ p & 0 & p & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} q & 0 & p & 0 \\ p & q & 0 & p \\ 0 & p & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. On obtient après calculs: $\Delta(Q) = 27q^2 + 4p^3$.

4) $Res(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow u_{P,Q}$ non inversible. Et

P, Q sont non premiers entre eux
$\Longleftrightarrow$ il existe un facteur R commun (donc $(U, V) \in \mathbf{C}[X]^2$ tel que $P = RU$ et $Q = RV$).

Montrons que ceci implique la nullité du résultant : en effet, $VP = RVU = QU$. Or $\deg(V) = \deg Q - \deg R$ et $\deg U = \deg P - \deg R$ et R est non constant, donc $\deg R \geqslant 1$, $\deg U \leqslant \deg P - 1$ et $\deg V \leqslant \deg Q - 1$. Bref, $Res(P, Q) = 0$ car $(-U, V) \in Ker(u_{P,Q})$ et $(-U, V) \neq 0_{\mathbf{C}_{m-1}[X] \times \mathbf{C}_{n-1}[X]}$.

Inversement, supposons que $Res(P, Q) = 0$. Alors $u_{P,Q}$ n'est pas injectif et il existe un couple $(U, V) \in \mathbf{C}_{m-1}[X] \times \mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que $UP = -VQ$. Supposons que P et Q n'ont aucun facteur commun non constant. Par le Lemme de Gauss, $P \mid V$ et $Q \mid U$ ce qui est clairement absurde avec les inégalités de degré $\deg(U) \leqslant m - 1$ et $\deg(V) \leqslant n - 1$.

Soit P un polynôme non constant. Alors P admet une racine multiple si et seulement si P et P' sont non premiers entre eux (dans ce cas on a un facteur commun aux deux et une racine de multiplicité au moins 2). De ce qui précède c'est donc équivalent à

$$Res(P, P') = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta(P) = 0.$$

5) Notons $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ les courbes d'équations respectives

$$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0, \quad 2x^2 + y^2 - y - 2 = 0.$$

Soit $y_0 \in \mathbf{R}$. Regardons déjà les points d'intersection tels que $y = y_0$.
Cela revient à regarder les $x \in \mathbf{R}$ tels que $P_{y_0}(x) = Q_{y_0}(x) = 0$ avec P_{y_0} et Q_{y_0} définis dans l'énoncé.
Si les deux courbes ont au moins un point d'intersection $x \in \mathbf{R}$, alors leur résultant est nul.
Le résultant permet donc de déterminer les directions $y = y_0$ le long desquelles il existe éventuellement des solutions (x, y_0).
Calculons

$$Res(P_{y_0}, Q_{y_0}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -y_0 & 1 & 0 & 2 \\ y_0^2 - 1 & -y_0 & y_0^2 - y_0 - 2 & 0 \\ 0 & y_0^2 - 1 & 0 & y_0^2 - y_0 - 2 \end{vmatrix} = 3y_0^2(y_0^2 - 1).$$

Les y_0 pour lesquels il existe peut-être des solutions x sont les $y_0 \in \{-1, 0, 1\}$.
Pour $y_0 = 0$: on résout $P_0(x) = Q_0(x)$ on trouve facilement $x = \pm 1$.

Pour $y_0 = 1$: on résout $P_1(x) = Q_1(x)$ et $x \in \{-2, 1\}$.
Pour $y_0 = -1$: on résout $P_{-1}(x) = Q_{-1}(x)$ et $x \in \{0, 1\}$.
Finalement l'ensemble des points d'intersection est

$$\{(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,1),(1,-2),(1,1)\}\,.$$