Liste d'exercices n^o 4

Exercice 1

Soit a un nombre réel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & 1-a & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de A.

2. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Pour ces valeurs de a calculer une matrice $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

4. On suppose $a = 0$. Montrer que les vecteurs $v_3 = (1, 0, 0), v_2 = Av_3, v_1 = Av_2$ forment une base de $\mathbf{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par $f(x) = Ax$ pour $x \in \mathbf{R}^3$ (vecteur colonne). Calculer la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 2

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit A une matrice carrée. On considère les hypothèses

(H_1) $\quad \chi_A(X) = (X-1)^2(2-X)$

(H_2) $\quad \mu_A(X) = (X-1)^2(X-2)$

(H_3) $\quad (A-I)(A-2I) = 0.$

Sous chacune des hypothèses $(H_i)_{i=1,2,3}$, dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1) A est une matrice carrée d'ordre 3

2) A est diagonalisable

3) 1 et 2 sont valeurs propres de A

4) Les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 2.

5) $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$

6) A est inversible.

Exercice 4

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E.

1) a) On suppose que f est un automorphisme. Montrer qu'il existe $P(X) \in K[X]$ tel que $f^{-1} = P(f)$.

b) On suppose que $Q(X) \in K[X]$ est tel que $Q(f)$ est inversible. Montrer qu'il existe $R(X) \in K[X]$ tel que $Q(f)^{-1} = R(f)$.

2) On suppose $K = \mathbf{C}$. On note $P_f(X)$ le polynôme caractéristique de f, et soit $Q(X) \in K[X]$. Montrer que $Q(f)$ est inversible si et seulement si $P_f(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux.

Exercice 5

Soit A la matrice de $M_3(\mathbf{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A.
4. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   En déduire la décomposition de Dunford de B.
5. Quel est le polynôme minimal de A ?

Exercice 6

Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs propres de B ? Quelles sont les dimensions de leurs sous espaces propres et de leurs sous-espaces caractéristiques associés ? Donner une base de ces sous-espaces. B est-elle diagonalisable ?

Exercice 7

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique P_u de u. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques F_i.
2. Donner une base suivant laquelle la matrice de u se décompose en deux blocs diagonaux.
3. Donner les projections p_i de $\mathbf{R}^4$ sur F_i.