

LISTE D'EXERCICES N° 5

(Lemme des noyaux, endomorphismes nilpotents, sous-espaces caractéristiques)

Lemme des noyaux**Exercice 1**Soit $u \in L(E)$ vérifiant $u^3 = Id$. Montrer que $E = \text{Ker}(u - Id) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + Id)$.**Exercice 2**Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u . On suppose qu'on peut écrire $P = QR$, avec Q et R premiers entre eux.Montrer que $\text{Im}(Q(u)) = \text{Ker}(R(u))$.**Endomorphismes nilpotents****Exercice 3**Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie ?**Exercice 4**Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.**Exercice 5**Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est nilpotente et que B commute avec A . Que peut-on dire de $\text{tr}(AB)$?**Exercice 6**Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^3 = A^2$. Montrer que A^2 est diagonalisable et que $A^2 - A$ est nilpotente.
2. On suppose que $A^{k+1} = A^k$, avec $k > 0$ un entier. Etablir l'existence d'un entier $p > 0$ tel que A^p est diagonalisable et que $A^p - A$ est nilpotente.

Sous-espaces caractéristiques**Exercice 7**

Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs propres de B ? Quelles sont les dimensions de leurs sous espaces propres et de leurs sous-espaces caractéristiques associés ? Donner une base de ces sous-espaces. B est-elle diagonalisable ?

Exercice 8

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique P_u de u . Trouver les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques F_i .
2. Donner une base suivant laquelle la matrice de u se décompose en deux blocs diagonaux.
3. Donner les projections p_i de \mathbb{R}^4 sur F_i .

Exercice 9

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver les valeurs propres, sous-espaces propres et sous-espaces caractéristiques de A .
2. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est triangulaire. En déduire la décomposition de Dunford de A . Quel est le polynôme minimal de A ?

Exercice 10

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel canonique \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.
2. Trouver une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\text{Ker } f^2$ est stable par g . En déduire qu'un tel endomorphisme g ne peut exister.