

LISTE D'EXERCICES N° 6

Exercice 1

Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E telles que pour tout $x \in E$, $f(x)g(x) = 0$. Montrer que l'une au moins des deux formes est nulle.

Exercice 2

Soient ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} définies pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ par

$$\phi_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\phi_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\phi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$$

Montrer que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de $(\mathbf{R}^3)^*$ et trouver la base duale.

Exercice 3

On considère E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n à coefficients complexes. Pour $a \in \mathbf{C}$ on définit une application $\Phi_a(P) = P(a)$ pour $P \in E$.

1. Montrer que la famille $(\Phi_a)_{a \in \mathbf{C}}$ définit une famille de formes linéaires sur E .
2. Soient $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1}$ distincts deux à deux. Montrer que $(\Phi_{a_0}, \dots, \Phi_{a_n})$ est une base de E^* . Déterminer sa base antéduale.
3. Montrer qu'il existe des constantes $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1}$ telles que pour tout $P \in E$:

$$\int_0^1 P(t) dt = \lambda_0 P(a_0) + \dots + \lambda_n P(a_n).$$

Donner la valeur explicite de ces constantes.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ finie. Supposons qu'il existe dans $\mathcal{L}(E)$ une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_N)$ où $N = n^2$ stable par composition (i.e. telle que pour tout $(i, j), u_i \circ u_j \in \mathcal{B}$). On considère alors \mathcal{B}^* la base duale de \mathcal{B} dans $\mathcal{L}(E)$ que l'on note (f_1, \dots, f_N) et enfin on définit $f = \sum_{i=1}^N f_i$.

1. Montrer que $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), f(u \circ v) = f(u) \cdot f(v)$.
2. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, montrer que $f(u) = 0$.
3. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur de rang 1, montrer que $f(u) = 0$.
4. Montrer que $f(\text{Id}_E) = 0$. Conclure.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit E^* le dual de E . Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on pose

$$F^\circ = \{\phi \in E^*; \phi(x) = 0 \forall x \in F\}.$$

1. Prouver que F° est un sous-espace vectoriel de E^* .
2. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Prouver que :
 - 2-a. si $F \subset G$, alors $G^\circ \subset F^\circ$,
 - 2-b. $(F + G)^\circ = F^\circ \cap G^\circ$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E .
 - 3-a. Montrer que l'application $\theta_F : E^* \rightarrow F^*$ définie par $\theta_F(\phi) = \phi|_F$ est linéaire et surjective.
 - 3-b. En déduire que

$$\dim F + \dim F^\circ = \dim E.$$

Exercice 6

Soit $E = \mathbf{R}^2$ que l'on munit d'une base (e_1, e_2) . On écrit donc tout élément x de E sous la forme $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Soit B l'application de $E \times E$ dans \mathbf{R} définie par

$$B(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_2 - x_2 y_1.$$

1. Montrer que B est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la forme quadratique associée.
3. Déterminer la matrice associée à B dans la base (e_1, e_2) .

Exercice 7

On considère $E = \mathbf{R}^2$ et $q : E \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$q : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - 2x_1 x_2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique. Déterminer la matrice associée à q dans la base canonique de \mathbf{R}^2 . Déterminer le noyau et le rang de q .
2. Déterminer l'ensemble des éléments isotropes de q . Montrer que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 8

Soit q l'application de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} définie par

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 3(x_1 - x_2)^2 \quad (x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3).$$

- 1-a. Montrer que q est une forme quadratique.
- 1-b. Déterminer la forme bilinéaire associée à q , notée f .
- 1-c. Déterminer le rang et le noyau de f .
2. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on note V_λ le sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 engendré par les vecteurs $u = (1, 0, -1)$ et $v_\lambda = (0, 1, \lambda)$. Déterminer suivant les valeurs de λ l'orthogonal V_λ^\perp de V_λ pour f . Interpréter les résultats obtenus.
3. Soient l_1, l_2, l_3 les formes linéaires de \mathbf{R}^3 , définies par

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2, \quad l_3(x_1, x_2, x_3) = -x_3.$$

- 3-a. Montrer que (l_1, l_2, l_3) est une base du dual de \mathbf{R}^3 ,
 - 3-b. Déterminer les composantes dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbf{R}^3 de la base duale de (l_1, l_2, l_3) , notée \mathcal{C} .
 - 3-c. Déterminer la matrice de f dans \mathcal{C} , notée C . Déterminer une matrice $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $C = {}^t P B P$ (où B désigne la matrice de f dans \mathcal{B}).
-