MINI FEUILLE DE RÉVISIONS

Exercice 1

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant :

$$f^2 = f^3, \quad \dim \mathrm{Ker}(f - Id) = 1.$$

Montrer l'existence d'une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec α valant 0 ou 1.

Exercice 2

Trouver les matrices M vérifiant :

$$\mathrm{Tr}(M) = 0, \quad M^3 - 4M^2 + 4M = 0.$$

On pourra constater entre autres que la matrice $M - 2Id$ est inversible.

Exercice 3

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbf{R}^4$ par :

$$q(x, y, z, t) = xz + xt + yz + yt.$$

1. Décomposer q en combinaison linéaire de carrés indépendants.
2. En déduire les vecteurs isotropes de q.

Exercice 4

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et q une forme quadratique sur E. Montrer l'équivalence suivante :

q est non dégénérée et il existe un vecteur isotrope non nuls

$\iff$ il existe une base de E pour laquelle la matrice de q est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff$ il existe une base de E pour laquelle la matrice de q est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$