Liste d'exercices n^o 9
(espaces euclidiens, groupe orthogonal)

Exercice 1

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien. On note $\mathcal{O}(E)$ le groupe orthogonal de E (c'est-à-dire le groupe des éléments $u \in \mathbf{GL}(E)$ qui préservent le produit scalaire). Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $u(F^\perp) \subset u(F)^\perp$.

2. En déduire que $u(F^\perp) = u(F)^\perp$ (on pourra comparer les dimensions).

Exercice 2

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien et soit u un endomorphisme symétrique de E. On suppose qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^k = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u est une symétrie orthogonale.

Exercice 3

Diagonaliser dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^3$) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien et $x \in E \setminus \{0\}$, $y \in E \setminus \{0\}$, $x \neq y$ tels que $\| x \| = \| y \|$.

1. Montrer qu'il existe une réflexion envoyant x sur y.

2. On suppose que $\dim E = 3$. Montrer qu'il existe un retournement envoyant x sur y.

Exercice 5

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2. Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de E. Pour $\theta \in [0, \pi]$, on note $u_\theta := \cos(\theta)\, e_1 + \sin(\theta)\, e_2$. Déterminer la matrice de la réflexion par rapport à la droite engendrée par u_θ.

Exercice 6

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2. Soient x, y deux vecteurs distincts non nuls tels que $\| x \| = \| y \| = 1$.

1. Montrer qu'il existe une rotation r telle que $y = r(x)$.

2. Soit r_1 une rotation telle que $y = r_1(x)$. Montrer que $r_1 = r$ (on pourra considérer $r_1^{-1} o\, r$)

Exercice 7

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit $u \in SO(E)$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = x_0$ (considérer le polynôme caractéristique de u et montrer qu'il admet une racine positive en analysant son signe en 0 et en $+\infty$).

2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Donner la description géométrique de cette transformation.

3. Montrer que la matrice suivante est la matrice d'une rotation (donner axe et angle)

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Déterminer R la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$ de la rotation d'axe dirigé par $e_1 + e_2 + e_3$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ($\mathbf{R}^3$ et l'axe de la rotation sont orientés). Que vaut R^3 ?

Exercice 9

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit $u \in \mathcal{O}(E) \setminus SO(E)$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = -x_0$.

2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Donner la description géométrique de cette transformation (pour $\theta = 0$, $\theta = \pi$ et $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$).

Exercice 10

Reconnaître les endormorphismes suivants :

1)

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2)

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3)

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$