Algèbre linéaire — Année 2016-2017

Déterminants

Exercice 1: avec la définition

1) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\sigma \in S_n$, on associe à σ l'endomorphisme u_σ de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$u_\sigma : \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \dots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\det u = \epsilon(\sigma)$. *(On peut le montrer directement à partir de la définition du déterminant ou bien utiliser l'exercice 11 de la Feuille 1)*

2) Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant de la matrice $A = (a_i b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 2: des calculs

1) Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Soient P, Q, R, S quatre polynômes de degré au plus 2. Que dire du déterminant suivant ?

$$\begin{vmatrix} P(-1) & P(0) & P(1) & P(2) \\ Q(-1) & Q(0) & Q(1) & Q(2) \\ R(-1) & R(0) & R(1) & R(2) \\ S(-1) & S(0) & S(1) & S(2) \end{vmatrix}.$$

2) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$. Justifier que la fonction f est polynomiale est déteminer son degré. Donner une expression factorisée de f.

Exercice 3: l'anneau des matrices

1) On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficient dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau. Est-il commutatif ? Quels en sont les éléments inversibles ?

2) On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont rationnels ou entiers respectivement. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sont des sous-anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Caractériser dans chaque cas le groupe des inversibles.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice nilpotente, c'est à dire telle qu'il existe $n \geq 1$ avec $A^n = 0$. Montrer que $\det A = 0$ et que $\det(I_n - A) = 1$. *(On pourra d'une part se reporter à l'exercice 14 de la feuille 1, d'autre part introduire la fonction $f(t) = \det(I_n - tA)$)*

Exercice 4: dériver un déterminant

1) Soient $a_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ une famille de n^2 fonctions dérivables, et $A(t) = (a_{i,j}(t))_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que la fonction $d(t) : t \mapsto \det A(t)$ est dérivable, et calculer sa dérivée.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$A(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 1+x \end{vmatrix}.$$

Exercice 5: droites et plans affines

1) Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{D}$ la droite affine passant par A et B. Soit $M = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$. En exprimant la condition $M \in \mathcal{D}$ avec un déterminant, donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

2) Soient $A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B), C = (x_C, y_C, z_C) \in \mathbb{R}^3$, et $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On suppose $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires, et on note $\mathcal{P}$ le plan affine passant par A,B et C. Soit $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer la condition $M \in \mathcal{P}$ avec un déterminant et donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

3) Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique $w \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\det(u, v, x) =< w, x >$ où $< .,. >$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. En notant $w = u \wedge v$ ce vecteur, on définit de manière univoque une application

$$\wedge : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto u \wedge v \end{array}$$

Montrer que $\wedge$ vérifie les propriétés suivantes

(i) $u \wedge v = -v \wedge u$,

(ii) $\wedge$ est linéaire en chacune de ses variables, i.e. pour $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u + v) \wedge w = \lambda(u \wedge w) + (v \wedge w)$ et $u \wedge (\lambda v + w) = \lambda(u \wedge v) + (u \wedge w)$,

(iii) $< u \wedge v, u >=< u \wedge v, v >= 0$,

(iv) si $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\|u \wedge v\| = \sin\theta \, \|u\| \, \|v\|$ où θ désigne l'angle non-orienté[1] entre u et v,

(v) si u, v ne sont pas colinéaires, (u, v, w) est une base directe de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6: Déterminant de Vandermonde

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z_0, ..., z_n \in \mathbb{C}$. On veut calculer le déterminant

$$\mathcal{V}(z_0, ..., z_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_0^n & z_1^n & \cdots & z_n^n \end{vmatrix}$$

[1] L'angle non-orienté entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est défini comme l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|}$.

1) Que vaut $\mathcal{V}(z_1, ..., z_n)$ si il existe deux indices $0 \leq i < j \leq n$ avec $z_i = z_j$? On suppose désormais que les z_i sont tous distincts.

2) On définit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = \mathcal{V}(z_0, ..., z_{n-1}, z)$. Justifier que f est polynomiale de degré au plus n. Que vaut le coefficient du monôme de degré n ?

3) En étudiant les racines de f, établir une formule reliant $\mathcal{V}(z_0, ..., z_n)$ et $\mathcal{V}(z_0, ..., z_{n-1})$. En déduire par récurrence une formule pour $\mathcal{V}(z_1, ..., z_n)$.

4) *Application.* Soient $z_0, ..., z_{n+1} \in \mathbb{C}$ tous distincts, et $w_0, ..., w_n \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que $P(z_i) = w_i$.

Exercice 7: Déterminant de Cauchy

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{C}$ tels que pour tous $1 \leq i < j \leq n$, $a_i + b_j \neq 0$. On veut calculer le déterminant

$$\mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_n, b_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

1) Que vaut $\mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_n, b_n)$ si il existe deux indices $0 \leq i < j \leq n$ avec $a_i = a_j$ ou bien $b_i = b_j$? On suppose désormais que les a_i sont tous distincts, de même les b_i.

2) On définit la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-a_1, ..., -a_n\} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = \mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_n, z)$. Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(z) = \alpha\frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^\star$, P et Q des polynômes unitaires de degrés respectivement au plus $n-1$ et n . Quelles sont les racines de P et de Q ?

3) Calculer de deux manières différentes $\lim_{z \to -a_n}(z + a_n)f(z)$. En déduire une expression de α en fonction de $\mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_{n-1}, b_{n-1})$.

4) En déduire par récurrence une formule pour $\mathcal{C}(a_1, b_1, ..., a_n, b_n)$.

Exercice 8: Résultant

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré au plus n.

1) Vérifier que $\mathbb{C}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{C}[X]$. Quelle est sa dimension ? (on donnera un exemple de base de $\mathbb{C}_n[X]$) Pour $n, m \in \mathbb{N}$, donner de même une base et la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X]$.

2) Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^m b_i X^i$ deux polynômes de degrés n et m respectivement (i.e. $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$). On considère l'application linéaire définie par

$$u_{P,Q} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{C}_{n+m-1}[X] \\ (U, V) & \mapsto & UP + VQ \end{array} .$$

Donner la matrice de u dans la base

$$\mathcal{B}_0 = ((1, 0), (X, 0), ..., (X^{m-1}, 0), (0, 1), (0, X), ..., (0, X^{n-1}))$$

au départ et $\mathcal{B}_1 = (1, X, ..., X^{n+m-1})$ à l'arrivée.

3) Si $U_{P,Q}$ désigne la matrice de $u_{P,Q}$ dans les bases introduites à la question précédente, on définit le *résultant* de P et Q par $\mathrm{Res}(P,Q) = \det U_{P,Q}$. Le *discriminant* de P est défini comme $\Delta(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-1} \mathrm{Res}(P,P')$. Calculer le discriminant du polynôme $P = aX^2 + bX + c$ où $a,b,c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et celui de $Q = X^3 + pX + q$ où $p,q \in \mathbb{C}$.

4) Si P et Q sont deux polynômes non nuls, montrer que $\mathrm{Res}(P,Q) = 0$ si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux. En déduire qu'un polynôme non constant admet une racine multiple si et seulement si son discriminant est nul.

5) Déterminer les points d'intersections dans le plan des courbes d'équation

$$\mathcal{E}_0 : x^2 - xy + y^2 - 1, \quad \mathcal{E}_1 : 2x^2 + y^2 - y - 2 \ .$$

(*Indication:* Fixer y_0. A quelle condition sur les polynômes $P_{y_0} = X^2 - y_0 X + y_0^2 - 1$ et $Q_{y_0} = 2X^2 + y^2 - y - 2$ les courbes $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ ont elles un point commun sur la droite d'équation $\{y = y_0\}$?).

Exercice 9: complexité

1) Majorer le nombre d'additions et de multiplications que nécessite le calcul du déterminant d'une matrice carrée de taille n à partir de la définition.

2) Majorer le nombre d'addition et de multiplications qu'implique le fait d'échelonner une matrice carrée de taille n par la méthode du pivot de Gauss, puis celui que nécessite le calcul du déterminant une fois la matrice échelonné.