TD DU CHAPITRE 2 – Polynômes à coefficients dans **R** ou **C**

EXERCICE 1
Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbf{K}[X]$, noté $(\mathbf{K}[X])^*$, c'est-à-dire l'ensemble $(\mathbf{K}[X])^* = \{P \in \mathbf{K}[X], \quad \exists Q \in \mathbf{K}[X] / PQ = 1\}$.

EXERCICE 2
1) Définir l'opération de composition notée $\circ$ sur $\mathbf{K}[X]$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Quel est le degré de $P \circ Q$?
2) Déterminer les P tels que $P \circ P = P$.

EXERCICE 3
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$.
1) Montrer que $P(X) - X$ divise $P \circ P(X) - P(X)$.
2) En déduire que $P(X) - X$ divise $P \circ P(X) - X$.
3) On note $P^n(X)$ le polynôme $P \circ P \circ \ldots \circ P$. Établir que $P(X) - X$ divise $P^n(X) - X$.

EXERCICE 4
Soient a, b deux nombres complexes. Donner une forme réduite de $A = \prod_{k=1}^{n} (a + b\omega_k)$, où les $(\omega_k)_{k=1,\ldots,n}$ désignent les racines n-ième de l'unité.

EXERCICE 5
Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbf{C}[X]$. On pose

$$M = \sup_{|z|=1} |P(z)|.$$

Montrer que tous les coefficients de P sont majorés par M.

♣ INDICATION – Commencer par calculer $P(1) + \ldots + P(\omega^n)$ avec ω une racine $(n+1)$-ième de l'unité.

EXERCICE 6
Soit $n \in \mathbf{N}$, montrer que le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'admet pas de racines multiples dans $\mathbf{C}$.

EXERCICE 7
Montrer que le polynôme $Q = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ divise

$$P = 2X^{n+2} - (n+1)(n+2)X^2 + 2n(n+2)X - n(n+1).$$

EXERCICE 8
Calculer le reste dans la division Euclidienne de $(\cos\alpha + X \sin\alpha)^n$ avec $\alpha \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$ par $X^2 + 1$.

Exercice 9

Soit $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de $\mathbf{K}[X]$ définie par

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\quad P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.

2) En déduire que pour tout entier n, P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.

3) Établir que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m.$$

4) Montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}$, et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathrm{PGCD}(P_{m+n}, P_n) = \mathrm{PGCD}(P_n, P_m)\,.$$

En déduire que $\mathrm{PGCD}(P_m, P_n) = \mathrm{PGCD}(P_n, P_r)$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n.

5) Conclure que $\mathrm{PGCD}(P_n, P_m) = P_{\mathrm{PGCD}(m,n)}$.

Exercice 10

1) Soit $(P, a, b) \in \mathbf{C}[X] \times \mathbf{C}^2$. Quel est le reste de la division Euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$? Traiter le cas $a \neq b$ puis $a = b$.

2) En déduire le reste de la division Euclidienne de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 11

1) Soit p un premier, $n_1, \ldots, n_p$ des entiers strictement positifs et d leur pgcd. Soit z une racine de $X^{n_1} + \ldots + X^{n_p} - p$. Montrer que $|z| \geq 1$.

2) Soit

$$Q = \frac{X^{n_1} + \ldots + X^{n_p} - p}{X^d - 1}$$

Montrer que Q est une somme de monômes du type $(X^d)^j$ avec j entier strictement positif.

Exercice 12

Soient $\mathbf{K}$ un corps et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n$ deux à deux distincts.

1) Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

2) On pose $A(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$. Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}.$$

Exercice 13

Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire. Montrer que toute racine rationnelle est nécessairement un entier.

Exercice 14

1) Étant donné un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, justifier l'existence d'un polynôme primitif de P, c'est-à-dire l'existence de $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $Q' = P$ où $'$ désigne la dérivée formelle habituelle sur les polynômes.

2) Trouver les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k + 1.$$

Exercice 15
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux assertions suivantes

— $\forall x \in \mathbf{R}, P(x) \geqslant 0$,

— $\exists (A,B) \in \mathbf{R}[X]^2 ; P = A^2 + B^2$.

Exercice 16 (Laguerre)
Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $L_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$L_n(x) = e^x \left(e^{-x} x^n \right)^{(n)} .$$

Observer que L_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

Exercice 17
On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par

$$P_0 = 2, P_1 = X, \quad \forall n \in \mathbf{N}, P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n.$$

1) Calculer P_2 et P_3. Déterminer degré et coefficient dominant de P_n.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $z \in \mathbf{C}^*$, on a

$$P_n \left(z + \frac{1}{z} \right) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$

3) En déduire une expression simple de $P_n(2\cos\theta)$ pour $\theta \in \mathbf{R}$.

4) Déterminer les racines de P_n.

Exercice 18
1) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Donner le degré et le coefficient dominant du polynôme

$$\frac{1}{2} \left(P(X+1) + P(X-1) \right).$$

2) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que

$$\frac{1}{2} \left(P_n(X+1) + P_n(X-1) \right) = X^n.$$

3) Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

4) Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

5) Trouver une relation entre P_n', P_{n-1} et en déduire $P_n^{(k)}$ en fonction de P_{n-k}.

6) Exprimer $P_n(X+2)$ en fonction de $P_0, \ldots, P_n$ et en déduire une relation de récurrence donnant P_n en fonction de $P_0, \ldots, P_{n-1}$.

Exercice 19
On souhaite déterminer les couples $(P,Q) \in \mathbf{R}[X]^2$ tels que

$$P^2 + (1 - X^2) Q^2 = 1.$$

1) Déterminer les couples tels que P soit constant.

2) Supposons à présent que $\deg(P) = n > 0$. Montrer que nécessairement $P' = \pm n Q$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ puis que l'on peut se contenter de la relation $P' = nQ$.

3) Montrer alors que P est solution d'une équation différentielle scalaire du second ordre à coefficients non constants et la résoudre.

♣ INDICATION – On pourra effectuer le changement de variable $t = \cos\theta$ où t désigne la variable de l'équation différentielle.

4) Montrer alors que $(P,Q) = \left(\pm T_n, \pm \frac{1}{n} T_n'\right)$ où T_n désigne le n-ième polynôme de TCHEBYCHEV

$$T_n = \cos(n \arccos(\theta)).$$

Justifier que T_n est un polynôme.

EXERCICE 20 (PROBLÈME)

On définit pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ les polynômes

$$U_n = \frac{1}{n!} X^n (X-1)^n, \quad P_n = U_n^{(n)}.$$

1) **a.** Expliciter P_0, P_1, P_2, P_3.

b. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de P_n ?

c. Montrer que $P_n \in \mathbf{Z}[X]$ et est de degré n. On développera le polynôme U_n avant de le dériver. Préciser ensuite le coefficient dominant et le coefficient constant de P_n ainsi que $P_n(1)$.

d. En appliquant la formule de LEIBNIZ, montrer que

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 X^{n-k} (X-1)^k.$$

Retrouver ainsi la valeur du coefficient constant de P_n et $P_n(1)$. Justifier également que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

2) *Propriétés intégrales*

a. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application $\mathscr{C}^n$.

En intégrant par parties n fois, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 U_n(t) f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 P_n(t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire que pour tout $Q \in \mathbf{R}[X]$, $\deg Q < \deg P \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 P_n(t) Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

b. Par des intégrations par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^m\,\mathrm{d}t$ où m,n sont deux entiers.

En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$.

c. Montrer que

$$\int_0^1 P_n(t) P_m(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad \text{si } m \neq n,$$

on dit que $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille *orthogonale* dans $L^2([0,1])$. Montrer que

$$\int_0^1 P_n^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}.$$

3) *Racines des polynômes P_n* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dans cette question on démontre par deux méthodes différentes que le polynôme P_n possède n racines distinctes et que ses racines sont dans $]0,1[$.

a. Soit $\mathscr{S} = \{x_1, \ldots, x_p\}$ l'ensemble éventuellement vide des racines de P_n dans $]0,1[$ et qui sont de multiplicité impaire, en convenant que $x_1 < \ldots. < x_p$.

Supposer que $p < n$ et utiliser **2a)** pour $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - x_k)$ (ou $Q = 1$ si $\mathscr{S} = \emptyset$).

b. Autre méthode — revenir à la définition de P_n et utiliser le théorème de Rolle.