TD SUR LE CHAPITRE 3 – Diagonalisation et Trigonalisation

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base naturelle (e_1, e_2, e_3) par

$$f(e_1) = -e_1 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 - e_2, \quad f(e_3) = e_2 - e_3.$$

Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f - \lambda I$ soit non injectif.

Exercice 3

Soit A une matrice antisymétrique réelle ($A^T = -A$). Étudier la parité de la fonction $x \mapsto \chi_A(x)$, où χ_A désigne le polynôme caractéristique de A.

Exercice 4

1. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Trouver les vecteurs propres et valeurs propres de A.
   (b) Trouver une formule pour A^n.
2. Mêmes questions pour la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Trouver une 2×2 matrice A avec valeurs propres 2 et 3 ; 2-vecteur propre $(1,3)$ et 3-vecteur propre $(6,-1)$. Quels sont les vecteurs propres et valeurs propres de A^{100}?

Exercice 6

Montrer que, si λ est un valeur propre pour A alors $\lambda + 1$ est une valeur propre pour $A + I$. Que peut-on dire pour $A + A^n$? Si B est n'importe quelle autre matrice, que peut-on dire sur les valeurs propres de $A + B$?

Exercice 7

Trouver les éléments propres (vecteurs propres et valeurs propres) des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables ? Si c'est le cas, déterminer une base de diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & -1 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u_1, \cdots, u_n$ des endomorphismes de E. On suppose que les u_i commutent deux à deux (i.e $\forall i, j \; u_i u_j = u_j u_i$) et sont tous diagonalisables. Montrer qu'il existe une base de E qui diagonalise tous les u_i.

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ une base de E. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est M.

1. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de f.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
   (c) Déterminer une matrice P de $Gl_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
2. (a) Déterminer la matrice de f^5 dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Calculer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ du vecteur $f^5(v)$ où $v = 2e_1 - e_2$.
   (c) Calculer f^m suivant les valeurs de m.

Exercice 11

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $Gl_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. On suppose que $f^2 + I = 0$, et que f n'est pas une homothétie.

1. Montrer que f est diagonalisable de valeurs propres i et $-i$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de f.

Exercice 13

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

1. Montrer qu'il existe un sous espace vectoriel de dimension 1 de E stable par f.

On suppose dorénavant que le polynôme caractéristique de f est le polynôme $(X-1)(X^2 - 4X + a)$, où a est un nombre réel, $a > 3$.

2. On suppose $a \neq 4$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit diagonalisable.

3. On suppose $a = 4$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang $(f - 2I)$ pour que f soit diagonalisable.
4. La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable ?

Exercice 14

Soit a un nombre réel. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & 1-a & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de A.
2. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Pour ces valeurs de a calculer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
4. On suppose $a = 0$. Montrer que les vecteurs $v_3 = (1,0,0), v_2 = Av_3, v_1 = Av_2$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x) = Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^3$ (vecteur colonne). Calculer la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 15

Trigonaliser les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16

Expliquer pourquoi le déterminant de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est le produit des valeurs propres complexes de A, valeurs propres comptées avec multiplicité, et la trace de A est la somme des valeurs propres complexes comptées avec multiplicité.

Exercice 17

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ trigonalisable. On suppose que $AB = BA$. Montrer que A et B sont trigonalisables dans une même base.

Application : On suppose de plus que A est nilpotent ($\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$). Montrer que $\det(A+B) = \det(B)$.

Exercice 18

Soit $E = SL_2(\mathbb{Z}) = \{$ matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant $1\}$.

1. Montrer que $(E, \times)$ est un groupe.
2. Soit A un élément de E tel que $\exists p \in \mathbb{N}^* | A^P = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.