TD SUR LE CHAPITRE 3 – Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1

Soit A une matrice carrée. On considère les hypothèses

$$(H_1) \qquad \chi_A(X) = (X-1)^2(2-X)$$
$$(H_2) \qquad \mu_A(X) = (X-1)^2(X-2)$$
$$(H_3) \qquad (A-I)(A-2I) = 0.$$

Sous chacune des hypothèses $(H_i)_{i=1,2,3}$, dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :
1) A est une matrice carrée d'ordre 3
2) A est diagonalisable
3) 1 et 2 sont valeurs propres de A
4) Les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 2.
5) $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$
6) A est inversible.

Exercice 2

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E.

1) a) On suppose que $f \in GL(E)$. Montrer qu'il existe $P(X) \in K[X]$ tel que $f^{-1} = P(f)$.

1) b) On suppose que $Q(X) \in K[X]$ est tel que $Q(f)$ est inversible. Montrer qu'il existe $R(X) \in K[X]$ tel que $Q(f)^{-1} = R(f)$.

2) On suppose $K = \mathbb{C}$. On note $\mu_f(X)$ le polynôme minimal de f, et soit $Q(X) \in K[X]$. Montrer que $Q(f)$ est inversible si et seulement si $\mu_f(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux (On pourra utiliser le théorème de Bezout).

Exercice 3

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) \neq 0$ et $AB = P(A)$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $AB = BA$ (On pourra écrire $P = P(0) + XQ(X)$).

Exercice 4

Soit $\Phi := M \in M_n(\mathbb{R}) \to M^t$. Calculer les valeurs propres et les sous espaces propres de Φ. Φ est elle diagonalisable ? Quel est le polynôme minimal de Φ ?

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\Phi := v \in \mathscr{L}(E) \to u \circ v$. Montrer que u et Φ ont le même polynôme minimal.

Exercice 6

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Quel est le polynôme minimal de A ?

Exercice 7

Soit $u \in L(E)$ vérifiant $u^3 = Id$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - Id) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$.

Exercice 8

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. On suppose qu'on peut écrire $P = QR$, avec Q et R premiers entre eux.
Montrer que $\mathrm{Im}(Q(u)) = \mathrm{Ker}(R(u))$.