M1 MIMSE | Examen Final | Semestre 1
Probabilités | (1h30) | 15 Décembre 2015

Les documents, calculatrices et autres objets électroniques sont interdits. Le correcteur portera une attention toute particulière à la rédaction. Les exercices sont indépendants. Bon courage.

Exercice 1. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et T telles que X suit une loi normale centrée réduite et T suit une loi de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(T = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Y = TX$.

1. Montrer que Y suit un loi normale centrée réduite.

Solution: Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant l'indépendance et le fait que la loi normale centrée soit symétrique,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(TX \leq y) &= \mathbb{P}(X \leq y; T = 1) + \mathbb{P}(-X \leq y; T = 1)\\ &= \mathbb{P}(X \leq y)\mathbb{P}(T = 1) + \mathbb{P}(-X \leq y)\mathbb{P}(T = 1)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq y) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y).\end{aligned}$$

Donc Y a même loi que X et suit donc une loi normale centrée réduite.

2. Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(TX^2) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(TX)\\ &= \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X)\\ &= 0 \times 1 - 0 \times 0 \times 0 = 0.\end{aligned}$$

3. Le vecteur (X, Y) est-il gaussien ?

Solution: Le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien, en effet :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = 0) = \mathbb{P}(X + TX = 0) &= \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{T = -1\})\\ &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(T = -1) - \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{T = -1\})\\ &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(T = -1) - \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(T = -1)\\ &= 0 + \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc si $X+Y$ est une gaussienne, elle est constante égale à $\frac{1}{2}$. Mais

$$\mathbb{P}(X+Y \geq 2) = \mathbb{P}(X(1+T) \geq 2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \geq 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(0 \geq 2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \geq 1) > 0.$$

Donc $X+Y$ n'est pas une gaussienne et donc (X,Y) n'est pas gaussien.

4. Calculer la fonction caractéristique du vecteur (X,Y).

Solution: Pour $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\phi_{(X,Y)}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t_1 X + t_2 Y}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{t_1 X + t_2 T X}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(e^{(t_1+t_2)X}\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(e^{(t_1-t_2)X}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{(t_1+t_2)^2}{2}} + e^{-\frac{(t_1-t_2)^2}{2}}\right).\end{aligned}$$

Exercice 2. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépedantes et de même loi ayant pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,\infty[}(x).$$

On pose, pour $n \geq 1$,

$$Z_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i.$$

1. Montrer que la suite de variables aléatoires (Z_n) tend vers $+\infty$, $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Solution: Comme (Z_n) est une suite croissante et strictement positive ($\mathbb{P}$-p.s., les X_i étant à support dans $[1,\infty[$), on montre que $\left(\frac{1}{Z_n}\right)$ tend vers 0 $\mathbb{P}$-presque sûrement. Pour $1 > \varepsilon > 0$, on calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{Z_n} \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(Z_n \leq \frac{1}{\varepsilon}) &= \mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq \frac{1}{\varepsilon}) \\ &= \left(\mathbb{P}(X_1 \leq \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{1/\varepsilon} \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,\infty[}(x)dx\right)^n \\ &= (1-\varepsilon)^n\end{aligned}$$

Or $\sum_{n\geq 1}(1-\varepsilon)^n < \infty$ (car $1 > \varepsilon > 0$), d'où la convergence presque sûre vers 0.

2. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{Z_n}{n}\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la densité.

Solution: Pour tout réel t, on calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{n} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(Z_n \leq nt\right) &= \left(\int_{-\infty}^{nt} \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,\infty[}(x)dx\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{nt}\right)^n 1_{t>1/n} \\ &\to e^{-1/t}1_{t\geq 0}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\left(\frac{Z_n}{n}\right)$ converge en loi vers la variable aléatoire ayant pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}1_{]0,\infty[}(x)$$

Problème. Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Dans cette question, on suppose que $\mathbb{E}(X^2)$ est finie. Montrer que le minimum de la fonction
$$\phi \ : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}((X-x)^2)$$
est atteint en $\mathbb{E}(X)$. Que vaut ce minimum ?

Une médiane de X est un réel m tel que

$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

2. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Montrer que X admet une infinité de médianes.
3. On suppose que la fonction de répartition F_X de X est continue. Montrer qu'une médiane m satisfait
$$F_X(m) = \frac{1}{2}.$$
Dans ce cas, y-a-t-il unicité de la médiane ?
4. Soit Y une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 et $\theta > 0$. On pose $X = \theta e^Y$.
   (a) Calculer la fonction de répartition de X.
   (b) L'espérance de X est-elle bien définie ?
   (c) Calculer une médiane de X. Est-elle unique ?
5. On suppose que $\mathbb{E}(|X|)$ est finie. Montrer que la fonction ψ définie par
$$\psi \ : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}(|X-x|)$$

est convexe, c'est-à-dire que :

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (1-t)\psi(x) + t\psi(y) \geq \psi((1-t)x + ty).$$

6. (Bonus). Montrer que la fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}$.
7. On suppose que X admet une densité f_X sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{E}(|X|)$ est finie.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(|X-x|) = \mathbb{E}(X) - x + 2x \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy - 2\int_{-\infty}^{x} y f_X(y)dy.$$

   (b) Montrer que toute médiane minimise la fonction ψ.
8. On ne suppose plus que X admet une densité mais simplement que X est une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(|X|)$ est finie.
   (a) Montrer que pour tout a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-b| - |x-a| = \begin{cases} b-a, & x < a, \\ a+b-2x, & a \leq x \leq b, \\ -(b-a), & x > b. \end{cases}$$

   En déduire que dans ce cas

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-b| - |x-a| \geq -(b-a) + 2(b-a)\mathbb{1}_{]-\infty,a]}(x).$$

   (b) Montrer que si m est une médiane de X et b un réel tel que $b \geq m$ on a,

$$\mathbb{E}(|X-b|) - \mathbb{E}(|X-m|) \geq 0.$$

   (c) En raisonnant de la même façon, montrer que si m est une médiane de X et b un réel tel que $b \leq m$ on a aussi :

$$\mathbb{E}(|X-b|) - \mathbb{E}(|X-m|) \geq 0.$$

   (d) Montrer que toute médiane minimise la fonction ψ.

❄❄❄ *Fin du sujet* ❄❄❄