Martingales de valeur terminale donnée

Via les équations différentielles stochastiques rétrogrades

Jonathan Harter

IMB Bordeaux

12 Janvier 2017 — Séminaire des doctorants de Nantes

Institut de Mathématiques de Bordeaux

Cadre et problématique

Soit un espace probabilisé filtré à horizon fini $[0, T]$, $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\big)$, et :

1. une variété différentiable $\mathcal{M}$ de dimension finie d (au moins $\geqslant 2$),
2. une variable aléatoire $\xi \in L^2(\Omega)$ dans $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$.

Problème « de MVTF »
Peut-on trouver une $\mathcal{F}$-martingale M dans $\mathcal{M}$ telle que $M_T = \xi$?
Y-a-t-il unicité ?

Applications possibles — résultats d'existence pour les EDSR (si une autre méthode est employée), en optimisation stochastique, Navier-Stokes via les FBSDE,

Cadre et problématique

Soit un espace probabilisé filtré à horizon fini $[0, T]$, $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$, et :

1. une variété différentiable $\mathcal{M}$ de dimension finie d (au moins $\geqslant 2$),
2. une variable aléatoire $\xi \in L^2(\Omega)$ dans $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$.

Problème « de MVTF »
Peut-on trouver une $\mathcal{F}$-martingale M dans $\mathcal{M}$ telle que $M_T = \xi$?
Y-a-t-il unicité ?

Applications possibles — résultats d'existence pour les EDSR (si une autre méthode est employée), en optimisation stochastique, Navier-Stokes via les FBSDE,

Cadre et problématique

Soit un espace probabilisé filtré à horizon fini $[0, T]$, $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\big)$, et :

1. une variété différentiable $\mathcal{M}$ de dimension finie d (au moins $\geqslant 2$),
2. une variable aléatoire $\xi \in L^2(\Omega)$ dans $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$.

Problème « de MVTF »
Peut-on trouver une $\mathcal{F}$-martingale M dans $\mathcal{M}$ telle que $M_T = \xi$?
Y-a-t-il unicité ?

Applications possibles — résultats d'existence pour les EDSR (si une autre méthode est employée), en optimisation stochastique, Navier-Stokes via les FBSDE,

Sommaire

Martingales : rappels et extensions.

Martingales locales sur un e.v. E de dimension finie. $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une (vraie) $\mathcal{F}$-*(resp. sur/sous) martingale* si pour tout t, $M_t \in L^1(\Omega)$, M est adapté et vérifie pour tous $t \geqslant s$,

$$\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = (\textit{resp.} \leqslant, \geqslant) \quad M_s \quad \text{p.s.} \tag{2.1}$$

$(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale *locale* s'il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de temps d'arrêt telle que $T_n \nearrow \infty$ et $M^{\rfloor T_n} = (M_{\inf(t,T_n)})_{t\in[0,T]}$ est une martingale U.I.

Semimartingales sur un e.v. E de dimension finie. Un processus de la forme $C + M + A$ où $C \in \mathbf{R}^d$, M est une martingale locale, pour tout $\omega \in \Omega$, $t \longmapsto A(\omega)$ est à variations finies.

Martingales : rappels et extensions.

Martingales locales sur un e.v. E de dimension finie. $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une (vraie) $\mathcal{F}$-*(resp. sur/sous) martingale* si pour tout t, $M_t \in L^1(\Omega)$, M est adapté et vérifie pour tous $t \geqslant s$,

$$\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = (\textit{resp.} \leqslant, \geqslant) \quad M_s \quad \text{p.s.} \tag{2.1}$$

$(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale *locale* s'il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de temps d'arrêt telle que $T_n \nearrow \infty$ et $M^{\rfloor T_n} = (M_{\inf(t,T_n)})_{t\in[0,T]}$ est une martingale U.I.

Semimartingales sur un e.v. E de dimension finie. Un processus de la forme $C + M + A$ où $C \in \mathbf{R}^d$, M est une martingale locale, pour tout $\omega \in \Omega$, $t \longmapsto A(\omega)$ est à variations finies.

Martingales : rappels et extensions.

Martingales locales sur un e.v. E de dimension finie. $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une (vraie) $\mathcal{F}$-*(resp. sur/sous) martingale* si pour tout t, $M_t \in L^1(\Omega)$, M est adapté et vérifie pour tous $t \geqslant s$,

$$\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = (\textit{resp.} \leqslant, \geqslant) \quad M_s \quad \text{p.s.} \tag{2.1}$$

$(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale *locale* s'il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de temps d'arrêt telle que $T_n \nearrow \infty$ et $M^{\rfloor T_n} = (M_{\inf(t,T_n)})_{t\in[0,T]}$ est une martingale U.I.

Semimartingales sur un e.v. E de dimension finie. Un processus de la forme $C + M + A$ où $C \in \mathbf{R}^d$, M est une martingale locale, pour tout $\omega \in \Omega$, $t \longmapsto A(\omega)$ est à variations finies.

Martingales : rappels et extensions.

Sur un e.v., le problème MVTF (existence) est résolu :

$$M^{\xi}{}_t = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t) \text{ est une solution.}$$

Unicité — Calcul direct (conditionner) ou :

Proposition 2.1 *Soit M un processus adapté intégrable à valeurs dans E. Alors*

M est une martingale $\iff$
$\Psi(M)$ est une sousmartingale réelle pour toute fonction convexe $\Psi : E \to \mathbf{R}$.

Definition 2.1 (Séparante) *Une fonction convexe $\Psi : E \times E \to \mathbf{R}^+$ telle que $\Psi^{-1}(0) = \{(x, x) \in E^2\}$ est appelée fonction séparante sur E.*

Martingales : rappels et extensions.

Sur un e.v., le problème MVTF (existence) est résolu :

$$M^{\xi}{}_t = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t) \text{ est une solution.}$$

Unicité — Calcul direct (conditionner) ou :

Proposition 2.2 *Soit M un processus adapté intégrable à valeurs dans E. Alors*

M est une martingale $\iff$
$\Psi(M)$ est une sousmartingale réelle pour toute fonction convexe $\Psi : E \to \mathbf{R}$.

Definition 2.2 (Séparante) *Une fonction convexe $\Psi : E \times E \to \mathbf{R}^+$ telle que $\Psi^{-1}(0) = \{(x,x) \in E^2\}$ est appelée fonction séparante sur E.*

Martingales : rappels et extensions.

Sur un e.v., le problème MVTF (existence) est résolu :

$$M^{\xi}{}_t = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t) \text{ est une solution.}$$

Unicité — Calcul direct (conditionner) ou :

Proposition 2.3 *Soit M un processus adapté intégrable à valeurs dans E. Alors*

M *est une martingale* $\iff$

$\Psi(M)$ *est une sousmartingale réelle pour toute fonction convexe*

$\Psi : E \to \mathbf{R}$.

Definition 2.3 (Séparante) *Une fonction convexe $\Psi : E \times E \to \mathbf{R}^+$ telle que $\Psi^{-1}(0) = \{(x, x) \in E^2\}$ est appelée fonction séparante sur E.*

Martingales : rappels et extensions.

Sur un e.v., le problème MVTF (existence) est résolu :

$$M^{\xi}{}_t = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t) \text{ est une solution.}$$

Unicité — Calcul direct (conditionner) ou :

Proposition 2.4 *Soit M un processus adapté intégrable à valeurs dans E. Alors*

$$M \text{ est une martingale} \iff$$

$\Psi(M)$ est une sousmartingale réelle pour toute fonction convexe $\Psi : E \to \mathbf{R}$.

Definition 2.4 (Séparante) *Une fonction convexe $\Psi : E \times E \to \mathbf{R}^+$ telle que $\Psi^{-1}(0) = \left\{(x, x) \in E^2\right\}$ est appelée fonction séparante sur E.*

Séparante vs Unicité

Utilité dans le problème d'unicité.
Si M et N résolvent le problème MVTF, et $\Psi : E \times E \to \mathbf{R}^+$ est une séparante, alors

$\Psi(M, N)$ est une sousmartingale réelle
i.e.

$$0 \leqslant \Psi(M_t, N_t) \leqslant \mathbf{E}(\Psi(M_1, N_1)|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(\Psi(\xi, \xi)|\mathcal{F}_t) = 0.$$

Donc $$\boxed{M = N \quad \text{ps}}.$$

Sommaire

Martingales (locales) dans une carte de $\mathcal{M}$

Comment étendre sur une variété ? (voir [Eme99] ou [Eme89])
On souhaite un objet qui notemment :

- généralise les martingales locales vectorielles dans le cadre Euclidien,
- tienne compte de la géométrie de la variété (courbure, etc...),
- soit intrinsèque.

Martingales (locales) dans une carte de $\mathcal{M}$

Soit ∇ une connexion (ou dérivée covariante) sur $\mathcal{M}$, $(\Gamma_{i,j}^{k})_{i,j,k}$ les symboles de Christoffel associés dans $(U,(x^i)_{i=1}^{d})$ une carte locale, X un processus à valeurs dans U.

Definition 3.1 *Le processus X est appelé ∇-martingale sur U si pour tout i,*

$$X^i + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Gamma_{k,l}^{i}(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^k, X^l \right\rangle_s}_{\text{Stieltjes}}$$

est une martingale locale réelle.

— Ce terme est nul dans le cas d'un e.v. (courbure nulle).
— Motivé par une formule de calcul stochastique (formule d'Itô).
— Si X prend des valeurs dans $\mathcal{M}$: découper le temps

Martingales (locales) dans une carte de $\mathcal{M}$

Soit ∇ une connexion (ou dérivée covariante) sur $\mathcal{M}$, $(\Gamma^k_{i,j})_{i,j,k}$ les symboles de Christoffel associés dans $(U, (x^i)_{i=1}^d)$ une carte locale, X un processus à valeurs dans U.

Definition 3.2 *Le processus X est appelé ∇-martingale sur U si pour tout i,*

$$X^i + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\cdot \Gamma^i_{k,l}(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s}_{\text{Stieltjes}}$$

est une martingale locale réelle.

— Ce terme est nul dans le cas d'un e.v. (courbure nulle).
— Motivé par une formule de calcul stochastique (formule d'Itô).
— Si X prend des valeurs dans $\mathcal{M}$: découper le temps

Martingales (locales) dans une carte de $\mathcal{M}$

Soit ∇ une connexion (ou dérivée covariante) sur $\mathcal{M}$, $(\Gamma^k_{i,j})_{i,j,k}$ les symboles de Christoffel associés dans $(U, (x^i)_{i=1}^d)$ une carte locale, X un processus à valeurs dans U.

Definition 3.3 *Le processus X est appelé ∇-martingale sur U si pour tout i,*

$$X^i + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\cdot \Gamma^i_{k,l}(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s}_{\textit{Stieltjes}}$$

est une martingale locale réelle.

— Ce terme est nul dans le cas d'un e.v. (courbure nulle).
— Motivé par une formule de calcul stochastique (formule d'Itô).
— Si X prend des valeurs dans $\mathcal{M}$: découper le temps

Martingales (locales) dans une carte de $\mathcal{M}$

Soit ∇ une connexion (ou dérivée covariante) sur $\mathcal{M}$, $(\Gamma^k_{i,j})_{i,j,k}$ les symboles de Christoffel associés dans $(U,(x^i)_{i=1}^d)$ une carte locale, X un processus à valeurs dans U.

Definition 3.4 *Le processus X est appelé ∇-martingale sur U si pour tout i,*

$$X^i + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Gamma^i_{k,l}(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s}_{\textit{Stieltjes}}$$

est une martingale locale réelle.

— Ce terme est nul dans le cas d'un e.v. (courbure nulle).
— Motivé par une formule de calcul stochastique (formule d'Itô).
— Si X prend des valeurs dans $\mathcal{M}$: découper le temps

Martingales (locales) dans une carte de $\mathcal{M}$

Soit ∇ une connexion (ou dérivée covariante) sur $\mathcal{M}$, $(\Gamma^k_{i,j})_{i,j,k}$ les symboles de Christoffel associés dans $(U, (x^i)_{i=1}^d)$ une carte locale, X un processus à valeurs dans U.

Definition 3.5 *Le processus X est appelé ∇-martingale sur U si pour tout i,*

$$X^i + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Gamma^i_{k,l}(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^k, X^l \right\rangle_s}_{\textit{Stieltjes}}$$

est une martingale locale réelle.

— Ce terme est nul dans le cas d'un e.v. (courbure nulle).
— Motivé par une formule de calcul stochastique (formule d'Itô).
— Si X prend des valeurs dans $\mathcal{M}$: découper le temps

Martingales (locales) dans une carte de $\mathcal{M}$

Précision sur le terme

$$X^i + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Gamma^i_{k,l}(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s}_{\textit{Stieltjes}}$$

$$\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s = \mathbf{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \left(X^k_{t^n_i} - X^l_{t^n_{i-1}} \right)^2,$$

$$0 = t^n_0 < t^n_1 < \ldots < t^n_{p_n} = s$$

suite de subdivisions emboitées de pas tendant vers 0.
Pour tout $\omega \in \Omega$, $s \mapsto \left\langle X^k(\omega), X^l(\omega)\right\rangle_s$ est une fonction à variations finies (*covariation quadratique de* X^k *et* X^l).

Martingales (locales) dans une carte de $\mathcal{M}$

Précision sur le terme

$$X^i + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Gamma^i_{k,l}(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s}_{Stieltjes}$$

$$\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s = \mathbf{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \left(X^k_{t^n_i} - X^l_{t^n_{i-1}}\right)^2,$$

$$0 = t^n_0 < t^n_1 < \ldots < t^n_{p_n} = s$$

suite de subdivisions emboitées de pas tendant vers 0.
Pour tout $\omega \in \Omega$, $s \mapsto \left\langle X^k(\omega), X^l(\omega)\right\rangle_s$ est une fonction à variations finies (*covariation quadratique de* X^k *et* X^l).

Martingales (locales) dans une carte de $\mathcal{M}$

Précision sur le terme

$$X^i + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\cdot \Gamma^i_{k,l}(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s}_{\textit{Stieltjes}}$$

$$\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s = \mathbf{P} - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{p_n}\left(X^k_{t_i^n} - X^l_{t_{i-1}^n}\right)^2,$$

$$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{p_n}^n = s$$

suite de subdivisions emboitées de pas tendant vers 0.

Pour tout $\omega \in \Omega$, $s \mapsto \left\langle X^k(\omega), X^l(\omega)\right\rangle_s$ est une fonction à variations finies (*covariation quadratique de* X^k *et* X^l).

Martingales (locales) dans une carte de $\mathcal{M}$

Précision sur le terme

$$X^i + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Gamma^i_{k,l}(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^k, X^l \right\rangle_s}_{\textit{Stieltjes}}$$

$$\left\langle X^k, X^l \right\rangle_s = \mathbf{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \left(X^k_{t^n_i} - X^l_{t^n_{i-1}} \right)^2,$$

$$0 = t^n_0 < t^n_1 < \ldots < t^n_{p_n} = s$$

suite de subdivisions emboitées de pas tendant vers 0.
Pour tout $\omega \in \Omega$, $s \mapsto \left\langle X^k(\omega), X^l(\omega) \right\rangle_s$ est une fonction à variations finies (*covariation quadratique de* X^k *et* X^l).

Heuristique

1. on commence par définir les semimartingales sur une variété :

$$X \text{ est une semimartingale sur } \mathcal{M}$$

$$\iff \quad \forall f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R}), \quad f(X) \text{ est une semimartingale réelle.}$$

2. Itô (en dimension 1) : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, X semimartingale,

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s = \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s$$

$$= \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}(M_s + A_s)$$

Heuristique

1. on commence par définir les semimartingales sur une variété :

$$X \text{ est une semimartingale sur } \mathcal{M}$$

$$\iff \quad \forall f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R}), \quad f(X) \text{ est une semimartingale réelle.}$$

2. Itô (en dimension 1) : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, X semimartingale,

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s &= \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s \\ &= \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}\left(M_s + A_s\right) \end{aligned}$$

Heuristique

1. on commence par définir les semimartingales sur une variété :

$$X \text{ est une semimartingale sur } \mathcal{M}$$

$$\iff \forall f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R}), f(X) \text{ est une semimartingale réelle.}$$

2. Itô (en dimension 1) : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s &= \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s \\ &= \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}\left(M_s + \cancel{A_s}\right) \end{aligned}$$

Le processus X est une martingale locale si et seulement s'il n'a pas de partie à variations finies.

Heuristique

1. on commence par définir les semimartingales sur une variété :

$$X \text{ est une semimartingale sur } \mathcal{M}$$

$$\iff \forall f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R}), f(X) \text{ est une semimartingale réelle.}$$

2. Itô (en dimension 1) : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s &= \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s \\ &= \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}\left(M_s + A_s\right) \end{aligned}$$

3. Avec $f = x^i$ on a la définition précédente.

$$X^i + \frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Gamma^i_{k,l}(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^k, X^l\right\rangle_s = \text{ une martingale locale.}$$

L'unicité

Definition 3.6 (Séparante) *Une fonction* $\nabla \otimes \nabla$ *convexe* $\Psi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbf{R}^+$ *telle que* $\Psi^{-1}(0) = \left\{(x, x) \in \mathcal{M}^2\right\}$ *est appelée fonction séparante sur* $\mathcal{M}$.

Déjà vu — existence d'une séparante $\Rightarrow$ unicité dans le problème MVTF

Unicité $\Rightarrow$ existence d'une séparante sur $\mathcal{M}$:

$$\Psi(x, y) = \inf_{X, Y \text{ martingales}, X_0 = x, Y_0 = y} \mathbf{P}(X_1 \neq Y_1).$$

Proposition 3.1 (Kendall, voir [Ken91] et [Ken90]) *Localement, il existe toujours une fonction séparante* Ψ.

L'unicité

Definition 3.7 (Séparante) *Une fonction* $\nabla \otimes \nabla$ *convexe* $\Psi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbf{R}^+$ *telle que* $\Psi^{-1}(0) = \left\{(x,x) \in \mathcal{M}^2\right\}$ *est appelée fonction séparante sur* $\mathcal{M}$.

Déjà vu — existence d'une séparante $\Rightarrow$ unicité dans le problème MVTF

Unicité $\Rightarrow$ existence d'une séparante sur $\mathcal{M}$:

$$\Psi(x,y) = \inf_{X,Y \text{ martingales}, X_0 = x, Y_0 = y} \mathbf{P}(X_1 \neq Y_1).$$

Proposition 3.2 (Kendall, voir [Ken91] et [Ken90]) *Localement, il existe toujours une fonction séparante* Ψ.

L'unicité

Definition 3.8 (Séparante) *Une fonction* $\nabla \otimes \nabla$ *convexe* $\Psi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbf{R}^+$ *telle que* $\Psi^{-1}(0) = \left\{(x, x) \in \mathcal{M}^2\right\}$ *est appelée fonction séparante sur* $\mathcal{M}$*.*

Déjà vu — existence d'une séparante $\Rightarrow$ unicité dans le problème MVTF

Unicité $\Rightarrow$ existence d'une séparante sur $\mathcal{M}$:

$$\Psi(x, y) = \inf_{X,Y \text{ martingales}, X_0 = x, Y_0 = y} \mathbf{P}(X_1 \neq Y_1).$$

Proposition 3.3 (Kendall, voir [Ken91] et [Ken90]) *Localement, il existe toujours une fonction séparante* Ψ*.*

Sommaire

Sommaire

Théorème de représentation

Theorem 4.1 *Il existe :*

- *une filtration $\mathcal{F}_W$ appelée filtration Brownienne,*
- *un processus W, appelé mouvement Brownien,*

tels que :

pour toute $\mathcal{F}_W$-martingale locale réelle M bornée dans L^2, il existe un (unique) processus Z adapté et C une constante vérifiant

$$\begin{aligned} M_t &= C + \int_0^t Z_s \,\mathrm{d}W_s \\ &= C + \mathbf{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} Z_{t_i^n} \left(W_{t_i^n}^k - W_{t_{i-1}^n}^l \right), \end{aligned}$$

$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{p_n}^n = s$ suite de subdivisions emboitées de pas tendant vers 0.

Théorème de représentation

Theorem 4.2 *Il existe :*

- *une filtration $\mathcal{F}_W$ appelée filtration Brownienne,*
- *un processus W, appelé mouvement Brownien,*

tels que :
pour toute $\mathcal{F}_W$-martingale locale réelle M bornée dans L^2, il existe un (unique) processus Z adapté et C une constante vérifiant

$$\begin{aligned} M_t &= C + \int_0^t Z_s \,\mathrm{d}W_s \\ &= C + \mathbf{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} Z_{t_i^n} \left(W^k_{t_i^n} - W^l_{t^n_{i-1}} \right), \end{aligned}$$

$0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{p_n}^n = s$ *suite de subdivisions emboitées de pas tendant vers 0.*

Aparté : le mouvement Brownien W comme marche aléatoire limite

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad \xi_i \text{ centrées, réduites, i.i.d.}$$

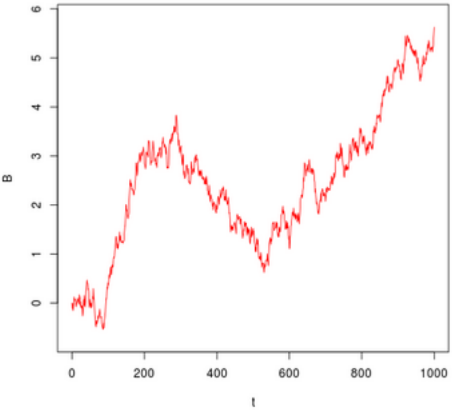
En approximant linéairement par morceaux, on a le théorème de Donsker :

Theorem 4.3 (Donsker, 1951)

$$\left(W_t^{(n)}\right)_t = \left(\frac{\{nt\}\, S_{\lfloor nt \rfloor} + (1 - \{nt\}) S_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sigma \sqrt{n}}\right)_t \longrightarrow_{n \to \infty}^{Loi} W,$$

où W est un processus à trajectoires continues appelé mouvement Brownien standard issu de 0.

Aparté : une simulation du mouvement Brownien standard



Sommaire

Qu'est-ce qu'une EDSR ?

Soit une v.a. $\xi \in L^2(\Omega)$ fixée.

Definition 4.1 *On appelle EDSR sur $\mathbf{R}^d$ toute équation différentielle stochastique de la forme*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{4.1}$$

où $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k} \to \mathbf{R}^d$ est une fonction aléatoire.

Une solution — (Y, Z), processus dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k}$ tel que Y soit solution de (4.1) et

- Y,Z sont adaptés ($\Rightarrow$ deux inconnues au lieu d'une)
- Intégrabilité — $\displaystyle\int_0^T \left(|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right) \mathrm{d}s < \infty$

Qu'est-ce qu'une EDSR ?

Soit une v.a. $\xi \in L^2(\Omega)$ fixée.

Definition 4.2 *On appelle EDSR sur $\mathbf{R}^d$ toute équation différentielle stochastique de la forme*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (4.1)$$

où $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k} \to \mathbf{R}^d$ est une fonction aléatoire.

Une solution — (Y, Z), processus dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k}$ tel que Y soit solution de (4.1) et

- Y,Z sont adaptés ($\Rightarrow$ deux inconnues au lieu d'une)
- Intégrabilité — $\int_0^T \left(|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right) \mathrm{d}s < \infty$

Qu'est-ce qu'une EDSR ?

Soit une v.a. $\xi \in L^2(\Omega)$ fixée.

Definition 4.3 *On appelle EDSR sur* $\mathbf{R}^d$ *toute équation différentielle stochastique de la forme*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{4.1}$$

où $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k} \to \mathbf{R}^d$ est une fonction aléatoire.

Une solution — (Y, Z), processus dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k}$ tel que Y soit solution de (4.1) et

- Y,Z sont adaptés ($\Rightarrow$ deux inconnues au lieu d'une)
- Intégrabilité — $\int_0^T \left(|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right) \mathrm{d}s < \infty$

Qu'est-ce qu'une EDSR ?

Soit une v.a. $\xi \in L^2(\Omega)$ fixée.

Definition 4.4 *On appelle EDSR sur* $\mathbf{R}^d$ *toute équation différentielle stochastique de la forme*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{4.1}$$

où $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k} \to \mathbf{R}^d$ est une fonction aléatoire.

Une solution — (Y, Z), processus dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k}$ tel que Y soit solution de (4.1) et

- Y,Z sont adaptés ($\Rightarrow$ deux inconnues au lieu d'une)
- Intégrabilité — $\displaystyle\int_0^T \left(|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right)\mathrm{d}s < \infty$

Formulation du problème de martingale si $\mathcal{F}$ est une filtration Brownienne

Point de vue développé par Darling dans [Dar95].

Soit $(x^i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ un système de **coordonnées globales** sur $\mathcal{M}$.

Y est une martingale sur $\mathcal{M}$ de valeur terminale ξ

$$\Longleftrightarrow$$

pour tout i, $\quad \mathrm{d}Y_t^i + \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(Y_s)\,\mathrm{d}\left\langle Y^j, Y^k \right\rangle_s = Z_s^i\,\mathrm{d}W_s^i, \quad Y_T^i = \xi^i,$

où Z^i, W^i sont ceux du théorème de représentation, associés à Y^i.

Formulation du problème de martingale si $\mathcal{F}$ est une filtration Brownienne

Point de vue développé par Darling dans [Dar95].
Soit $(x^i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ un système de **coordonnées globales** sur $\mathcal{M}$.

Y est une martingale sur $\mathcal{M}$ de valeur terminale ξ

$$\iff$$

$$\text{pour tout } i, \quad \mathrm{d}Y_t^i + \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(Y_s)\,\mathrm{d}\left\langle Y^j, Y^k\right\rangle_s = Z_s^i\,\mathrm{d}W_s^i, \quad Y_T^i = \xi^i,$$

où Z^i, W^i sont ceux du théorème de représentation, associés à Y^i.

Formulation du problème de martingale si $\mathcal{F}$ est une filtration Brownienne

Point de vue développé par Darling dans [Dar95].
Soit $(x^i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ un système de **coordonnées globales** sur $\mathcal{M}$.

Y est une martingale sur $\mathcal{M}$ de valeur terminale ξ

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{pour tout } i, \quad \mathrm{d}Y_t^i + \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(Y_s)\,\mathrm{d}\left\langle Y^j, Y^k \right\rangle_s = Z_s^i\,\mathrm{d}W_s^i, \quad Y_T^i = \xi^i,$$

où Z^i, W^i sont ceux du théorème de représentation, associés à Y^i.

Réecriture Backward

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{pour tout } i, \quad \mathrm{d}Y^i_t + \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(Y_s)Z^j_sZ^k_s\,\mathrm{d}s = Z^i_s\,\mathrm{d}W^i_s, \quad Y^i_T = \xi^i,$$

Cela revient à résoudre sur $\mathbf{R}^d$ l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s,$$

avec $f(s, y, z) = \frac{1}{2}\Gamma_{ij}(y)z^iz^j \in \mathbf{R}^d$.

Réecriture Backward

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{pour tout } i, \quad \mathrm{d}Y_t^i + \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(Y_s)Z_s^j Z_s^k \,\mathrm{d}s = Z_s^i \,\mathrm{d}W_s^i, \quad Y_T^i = \xi^i,$$

Cela revient à résoudre sur $\mathbf{R}^d$ l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \,\mathrm{d}W_s,$$

avec $f(s,y,z) = \frac{1}{2}\Gamma_{ij}(y)z^i z^j \in \mathbf{R}^d$.

Sommaire

Résultat historique, cas Lipschitzien

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leqslant K\left(|y-y'| + |z-z'|\right) \qquad \text{(HLip)}$$

Theorem 5.1 (Pardoux-Peng (1990), [PP90]) *Sous (HLip), l'EDSR (4.1) admet une unique solution* (Y, Z) *telle que*

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T} |Y_s|^2\right) < \infty \quad \textit{et} \quad \mathbf{E}\left(\int_0^T |Z_s|^2 \,\mathrm{d}s\right) < \infty.$$

Preuve : point fixe dans $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2$ (ou schéma de Picard)

Résultat historique, cas Lipschitzien

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leqslant K\left(|y-y'| + |z-z'|\right) \qquad \text{(HLip)}$$

Theorem 5.2 (Pardoux-Peng (1990), [PP90]) *Sous (HLip), l'EDSR (4.1) admet une unique solution* (Y, Z) *telle que*

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T} |Y_s|^2\right) < \infty \quad \textit{et} \quad \mathbf{E}\left(\int_0^T |Z_s|^2 \,\mathrm{d}s\right) < \infty.$$

Preuve : point fixe dans $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2$ (ou schéma de Picard)

Résultat historique, cas Lipschitzien

$$f(s, y, z) = -\frac{1}{2}\Gamma^{\cdot}_{ij}(y)z^i z^j.$$

Problème — pour MVTF, f est à croissance quadratique en z.

Un premier exemple d'EDSR quadratique SCALAIRE

$$Y_t = \xi + \int_t^T \frac{1}{2} |Z_s|^2 \, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \, \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Faisons le changement $y = \exp(Y)$,

$$y_t = \exp(\xi) - \int_t^T z_s \, \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Pour (y, z), le cas Lipchitz (et linéaire) s'applique lorsque

$$\exp(\xi) \in L^2.$$

Solution explicite —

$$y_t = \mathbf{E}(\exp(\xi)|\mathcal{F}_t), \quad z \text{ donné par le théorème de représentation.}$$

$$Y_t = \ln(y_t), \quad Z_t = \frac{z_t}{y_t}.$$

Un premier exemple d'EDSR quadratique SCALAIRE

$$Y_t = \xi + \int_t^T \frac{1}{2} |Z_s|^2 \, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \, \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Faisons le changement $y = \exp(Y)$,

$$y_t = \exp(\xi) - \int_t^T z_s \, \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Pour (y, z), le cas Lipchitz (et linéaire) s'applique lorsque

$$\exp(\xi) \in L^2.$$

Solution explicite —

$$y_t = \mathbf{E}(\exp(\xi) | \mathcal{F}_t), \quad z \text{ donné par le théorème de représentation.}$$

$$Y_t = \ln(y_t), \quad Z_t = \frac{z_t}{y_t}.$$

Un premier exemple d'EDSR quadratique SCALAIRE

$$Y_t = \xi + \int_t^T \frac{1}{2} |Z_s|^2 \, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \, \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Faisons le changement $y = \exp(Y)$,

$$y_t = \exp(\xi) - \int_t^T z_s \, \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Pour (y, z), le cas Lipchitz (et linéaire) s'applique lorsque

$$\exp(\xi) \in L^2.$$

Solution explicite —

$$y_t = \mathbf{E}(\exp(\xi)|\mathcal{F}_t)\,, \quad z \text{ donné par le théorème de représentation.}$$

$$Y_t = \ln(y_t), \quad Z_t = \frac{z_t}{y_t}.$$

Hypothèses : cas quadratique

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z)| \leqslant (K_y + L_y|z|^2)|y-y'|, \tag{HLipy}$$
$$|f(t,y,z) - f(t,y,z')| \leqslant (K_z + L_z(|z| + |z'|))\,|z-z'|. \tag{HQUADz}$$

Résultat historique : cas quadratique scalaire

Kobylanski, Lepeltier et San Martin : obtiennent un résultat général dans le cas ξ bornée, $d = 1$ (voir [Kob00] et [SML97]).

Theorem 5.3 (Kobylanski (2000), voir [Kob00]) *Sous*

1. $f(t,y,z) = a_0(t,y,z)y + f_0(t,y,z)$, $|a_0(t,y,z)| \leqslant A$, $|f_0(t,y,z)| \leqslant B + c(|y|)\,|z|^2$,
2. *c continue croissante*
3. *ξ bornée,*

l'EDSR admet au moins une solution.

Résultat historique : cas quadratique scalaire

Kobylanski, Lepeltier et San Martin : obtiennent un résultat général dans le cas ξ bornée, $d = 1$ (voir [Kob00] et [SML97]).

Theorem 5.4 (Kobylanski (2000), voir [Kob00]) *Sous*

1. $f(t, y, z) = a_0(t, y, z)y + f_0(t, y, z)$, $|a_0(t, y, z)| \leqslant A$, $|f_0(t, y, z)| \leqslant B + c(|y|)\,|z|^2$,
2. *c continue croissante*
3. *ξ bornée,*

l'EDSR admet au moins une solution.

Autres résultats dans le cas quadratique

D'autres résultats, notamment

- Sous $d = 1$ toujours, ξ admettant un moment exponentiel, f convexe (Briand & Hu, 2006, [BH06])
- Dans le cas multidimensionnel,
  1. ξ bornée et de norme L^∞ assez petite (Tevzadzé, 2012,[Tev08])
  2. à générateur quadratique en la diagonale (Hu, Tang, 2014, [HT16]), $\alpha \in [1, 2[$

$$\left|f^i(y,z)\right| \leqslant C\left(1 + |y| + |z|^\alpha + \left|z^{ii}\right|^2\right).$$

Autres résultats dans le cas quadratique

D'autres résultats, notamment

- Sous $d = 1$ toujours, ξ admettant un moment exponentiel, f convexe (Briand & Hu, 2006, [BH06])
- Dans le cas multidimensionnel,
  1. ξ bornée et de norme L^∞ assez petite (Tevzadzé, 2012,[Tev08])
  2. à générateur quadratique en la diagonale (Hu, Tang, 2014, [HT16]), $\alpha \in [1, 2[$

$$\left|f^i(y,z)\right| \leqslant C\left(1 + |y| + |z|^\alpha + \left|z^{ii}\right|^2\right).$$

Autres résultats dans le cas quadratique

D'autres résultats, notamment

- Sous $d = 1$ toujours, ξ admettant un moment exponentiel, f convexe (Briand & Hu, 2006, [BH06])
- Dans le cas multidimensionnel,
  1. ξ bornée et de norme L^∞ assez petite (Tevzadzé, 2012,[Tev08])
  2. à générateur quadratique en la diagonale (Hu, Tang, 2014, [HT16]), $\alpha \in [1, 2[$
  $$\left|f^i(y,z)\right| \leqslant C\left(1 + |y| + |z|^\alpha + \left|z^{ii}\right|^2\right).$$

Localisation

$$Y_t = \xi + \int_t^T \underbrace{f}_{\textbf{Quad } z, Lip\ y}(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$\downarrow$ Localisation

$$Y_t^M = \xi + \int_t^T \underbrace{f^M}_{\textbf{Lip } z, Lip\ y}(s, Y_s^M, Z_s^M)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^M\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

D'après le résultat historique de Pardoux & Peng :

Il existe une solution (Y^M, Z^M) à l'EDSR localisée, avec f^M au lieu de f

Localisation

$$Y_t = \xi + \int_t^T \underbrace{f}_{\textbf{Quad } z, Lip\ y} (s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$\downarrow$ Localisation

$$Y_t^M = \xi + \int_t^T \underbrace{f^M}_{\textbf{Lip } z, Lip\ y} (s, Y_s^M, Z_s^M)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^M\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

D'après le résultat historique de Pardoux & Peng :

Il existe une solution (Y^M, Z^M) à l'EDSR localisée, avec f^M au lieu de f

Hypothèses du résultat

$$Y_t^M = \xi + \int_t^T \underbrace{f^M}_{Lip\ z, Lip\ y}(s, Y_s^M, Z_s^M)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^M\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.1}$$

Soit $m > 1$. On suppose :

1. (HLipy), (HQUADz),
2. $\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO}$ assez petite (dépendant de m), uniformément bornée en M et ξ, où

$$\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO} = \sup_{\tau \text{ t.a.}} \left(\mathbf{E}\left(\int_\tau^T \left| Z_s^M \right|^2 \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_\tau \right) \right)^{1/2}.$$

3. hypothèse sur l'aléa du générateur f.

Hypothèses du résultat

$$Y_t^M = \xi + \int_t^T \underbrace{f^M}_{Lip\ z, Lip\ y}(s, Y_s^M, Z_s^M)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^M\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.1}$$

Soit $m > 1$. On suppose :

1. (HLipy), (HQUADz),
2. $\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO}$ assez petite (dépendant de m), uniformément bornée en M et ξ, où
$$\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO} = \sup_{\tau \text{ t.a.}} \left(\mathbf{E}\left(\int_\tau^T \left| Z_s^M \right|^2 \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_\tau \right) \right)^{1/2}.$$
3. hypothèse sur l'aléa du générateur f.

Hypothèses du résultat

$$Y_t^M = \xi + \int_t^T \underbrace{f^M}_{Lip\ z, Lip\ y} (s, Y_s^M, Z_s^M)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^M\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.1}$$

Soit $m > 1$. On suppose :

1. (HLipy), (HQUADz),
2. $\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO}$ assez petite (dépendant de m), uniformément bornée en M et ξ, où

$$\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO} = \sup_{\tau \text{ t.a.}} \left(\mathbf{E}\left(\int_\tau^T \left| Z_s^M \right|^2 \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_\tau \right) \right)^{1/2}.$$

3. hypothèse sur l'aléa du générateur f.

Résultat

$$\mathcal{Z}^m_{BMO} = \left\{ Z,\ \text{BMO process} \;\Big/\; \frac{mL_y}{2}\left\|Z\star W\right\|^2_{BMO} + L_z C'_m \left\|Z\star W\right\|_{BMO} < \frac{1}{4} \right\}$$

Theorem 5.5 (H. , Richou, 2016,[HR16]) *Pour tout $m > 1$, sous les hypothèses précédentes, il existe une unique solution dans l'ensemble des processus (Y, Z) tels que*

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T} |Y_s|^{2m^*}\right) < \infty, \mathbf{E}\left(\left(\int_0^T |Z_s|^2 \,\mathrm{d}s\right)^{m^*/2}\right) < \infty, Z \in \mathcal{Z}_{BMO}.$$

Philippe Briand and Ying Hu.
BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value.
Probability Theory and Related Fields, 136(4) :604–618, April 2006.

Richard W. R Darling.
Constructing gamma-martingales with prescribed limit, using backwards SDE.
The Annals of Probability, 23(3) :1234–1261, 1995.

Michel Emery.
Stochastic calculus in manifolds.
Universitext. Springer-Verlag, Berlin, Berlin, Heidelberg, 1989.

Michel Emery.
Martingales continues dans les variétés différentiables.
March 1999.

Jonathan Harter and Adrien Richou.
A stability approach for solving multidimensional quadratic BSDEs.
June 2016.

Ying Hu and Shanjian Tang.
Multi-dimensional backward stochastic differential equations of diagonally quadratic generators.
Stochastic Processes and their Applications, 126(4) :1066–1086, April 2016.

Wilfrid S Kendall.
Probability, Convexity, and Harmonic Maps with Small Image I : Uniqueness and Fine Existence.
Proceedings of the London Mathematical Society, s3-61(2) :371–406, September 1990.

Wilfrid S Kendall.
Convexity and the hemisphere.
Journal of the London Mathematical Society. Second Series, 43(3) :567–576, 1991.

Magdalena Kobylanski.
Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth.
Annals of Probability, 2000.

Etienne Pardoux and Serge Peng.
Adapted solution of a backward stochastic differential equation.
Systems and Control Letters, 14(1) :55–61, January 1990.

Jaime San Martin and Jean-Pierre Lepeltier.
Backward stochastic differential equations with continuous coefficient.
Statistics and Probability Letters, 32(4) :425–430, April 1997.

Revaz Tevzadze.
Solvability of backward stochastic differential equations with quadratic growth.
Stochastic Processes and their Applications, 118(3) :503–515, March 2008.