INTERROGATION # 2 – LE 12/12/2016, 30 MINUTES

SUJET 1

EXERCICE 1 (COURS)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de cet espace.

1) Définir le polynôme caractéristique χ_u de u.

2) Démontrer que les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u.

3) Énoncer le critère de diagonalisabilité en fonction de χ_u.

4) Soit $\lambda \in Sp(u)$.
Démontrer que $\dim E_\lambda \leqslant mult_\lambda(\chi_u)$, où $mult_\lambda(\chi_u)$ désigne la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u. L'inégalité est-elle vraie si $\lambda \in \mathbf{K} \backslash Sp(u)$?
♣ INDICATION – On pourra former une base de E adaptée à E_λ et regarder le polynôme caractéristique dans cette base.

EXERCICE 2
Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Vos réponses

INTERROGATION # 2 – LE 12/12/2016, 30 MINUTES

SUJET 2

EXERCICE 1 (COURS)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de cet espace. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$, avec $a_k \in \mathbf{K}$ pour tout k.

1) Définir l'endomorphisme $P(u)$.

2) Définir *proprement* le polynôme minimal m_u de u.

3) On souhaite démontrer que les racines de m_u sont exactement les valeurs propres de u.

- **a.** Si λ est racine de m_u, montrer que λ est racine de χ_u.
- **b.** Soit λ une racine de χ_u. Montrer que λ est racine de m_u.

  ♣ INDICATION – On pourra effectuer la division Euclidienne de m_u par $X - \lambda$.

4) Énoncer un critère de diagonalisation en fonction de m_u.

EXERCICE 2

Réduire la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Vos réponses