université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2014 / 2015** **SESSION 1 D'AUTOMNE** PARCOURS / ETAPE: **PY300, 304, SM300** Code UE : **M1PY3W11** Epreuve : **Mathématiques** Date : **Jeudi 8 Janvier 2015** Heure : **8h30** Durée : 1h30 Documents : non autorisés Epreuve de MM. J-L. Artigue, J. Harter, G.Lazzarini, A.Noussair, J.Tong Mme. G. Godinaud	**Collège Sciences et technologies**

-I- -1) On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

-a- On définit $\boldsymbol{\varepsilon_1 = (1, -2, 1)}$. Vérifier que ε_1 est un vecteur propre de A.
Quelle valeur propre met-il en évidence ?

-b- Sans calcul, que peut-on dire de la valeur du déterminant de A et pourquoi ?
A est-elle inversible ?
L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, est-il bijectif ?
Déterminer le vecteur (a , b , c) , élément du noyau de f , de première coordonnée 1 par rapport à $\mathcal{B}$, base canonique de $\mathbb{R}^3$. On le notera $\boldsymbol{\varepsilon_2}$.
Quelle valeur propre de A , $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ met-il en évidence ?

-c- Comparer les sommes des coefficients de chaque ligne de A .
Quelle valeur propre de A voit-on apparaitre ?
Donner un vecteur propre $\boldsymbol{\varepsilon_3}$ de première coordonnée 1 par rapport à $\mathcal{B}$, associé à cette valeur propre .

-d- On note $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{\varepsilon_i})_{i=1,2,3}$. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. A est-elle diagonalisable ?
Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

-e- On considère la matrice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{P^3 - 2.P^2 + 3.P}$.
En déduire que P est inversible et calculer P^{-1} par la méthode de son choix .

-f- Ecrire la relation exprimant **A** en fonction de P , P^{-1} et d'une matrice diagonale $\boldsymbol{\Delta}$ qu'on explicitera.

-2) Résoudre le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2.y(t) + z(t) + 2t + 3 \\ y'(t) = 2.x(t) + 2\,z(t) + 6 \\ z'(t) = x(t) + 2.y(t) + z(t) - 2t + 3 \end{cases}$

où x , y , z sont trois applications de variable t , dérivables sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la solution particulière vérifiant la condition initiale **(x(0),y(0),z(0)) = (1,1,1)** .

-II- On donne les matrices $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

et la matrice $\underline{\mathbf{G = B \times D \times C}}$. On note $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

g est l'**endomorphisme** de $\mathbb{R}^3$ **canoniquement associé à G**.

On note $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}_i)_{i=1,2,3}$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par $\mathbf{u_1 = (2,3,2)}$, $\mathbf{u_2 = (1,2,1)}$ et $\mathbf{u_3 = (1,0,0)}$.

-1)-a- Calculer le produit $\mathbf{C \times B}$. Qu'en déduire pour B et C ?

-b- De quel endomorphisme simple de $\mathbb{R}^3$, B est-elle la matrice par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée ?

-c- Calculer la matrice **G** de **g** par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$.

-d- Pour tout indice i élément de {1 , 2 , 3} , exprimer $\mathbf{g(u_i)}$ en fonction de $\mathbf{u_i}$.
En déduire les valeurs propres de g et les sous-espaces propres associés.
Quelles sont leurs dimensions ?
Quelle est la matrice de **g** par rapport à la base $\mathcal{B}'$?

-2)-a- Si une matrice H vérifie $\mathbf{H^2 = D}$, montrer que $\mathbf{(B \times H \times C) \times (B \times H \times C) = G}$.

-b- Calculer toutes les matrices diagonales $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ telles que $\mathbf{H^2 = D}$.

-c- En déduire 4 matrices dont le carré est G .

-3) Le but de cette question est de déterminer l'ensemble des matrices **M** de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathbf{M^2 = G}$ **(*)**

Soit **M** une **solution quelconque de** l'équation **(*)**, $\boldsymbol{\varphi}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé. On ne connait explicitement ni M ni φ .

-a- Puisque $G = M^2$, montrer que $\mathbf{M \times G = G \times M}$.
Qu'en déduire pour les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{\varphi o g}$ et $\boldsymbol{g o \varphi}$?

-b- $u_3 = (1,0,0)$ est vecteur propre de g . Rappeler l'expression de $g(u_3)$ en fonction de u_3.
Sans connaitre φ , exprimer $\boldsymbol{\varphi(g(u_3))}$ puis $\boldsymbol{g(\varphi(u_3))}$ en fonction de $\boldsymbol{\varphi(u_3)}$.

-c- Si $\varphi(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$, pourquoi $\mathbf{u_3}$ est-il vecteur propre de $\boldsymbol{\varphi}$?

-d- Si $\varphi(u_3) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\boldsymbol{\varphi(u_3)}$ est-il vecteur propre de **g** ?
Rappeler la dimension du sous-espace propre de **g** qui contient $\mathbf{u_3}$.
En déduire qu'il existe un réel $\boldsymbol{\lambda_3}$ tel que $\boldsymbol{\varphi(u_3) = \lambda_3 . u_3}$.

-e- La même démarche menée à partir de $\mathbf{u_1}$ ou de $\mathbf{u_2}$ aboutirait à un résultat identique .
Ainsi nécessairement $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de g qui sont aussi vecteurs propres de φ .
Quel est l'aspect de la matrice de φ relativement à $\mathcal{B}'$? Pourquoi son carré est-il D ?

-f- En déduire l'ensemble des matrices M telles que $\mathbf{M^2 = G}$.