N1MA3W01 Algèbre 2 - Correction du Partiel 1

Exercice 1

a) Trouver deux matrices diagonalisables de somme non diagonalisable.

b) Trouver deux matrices diagonalisables de produit non diagonalisable.

Corrigé

a) On peut prendre par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme A a deux valeurs propres distinctes elle est diagonalisable et B est diagonale ; par contre

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable, car sinon elle serait nulle !

b) On peut prendre par exemple les deux matrices diagonalisables

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire

$$\{M \in M_3(\mathbb{R}) / \quad AM + MA = 0\}.$$

Corrigé

1. On calcule le déterminant de

$$A - XId_3 = \begin{pmatrix} -1-X & 0 & 3 \\ -3 & 2-X & 3 \\ 0 & 0 & 2-X \end{pmatrix}$$

en développant selon la dernière ligne, cela donne

$$\begin{aligned} \det(A - XId_3) &= (-1)^{3+3}(2-X)\begin{vmatrix} -1-X & 0 \\ -3 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= -(2-X)^2(1+X). \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc -1 et 2. Quelques calculs montrent que le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 2 et que la matrice de passage à la forme diagonale

$$D = \operatorname{diag}(2, 2, -1)$$

est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Notons

$$\mathcal{A}_A = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / \quad AM + MA = 0\}$$

et

$$\mathcal{A}_D = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / \quad DM + MD = 0\}.$$

(La notation $\mathcal{A}$ est choisie pour faire référence au concept d'*anti-commutant* d'une matrice.)

Notons $M = (m_{i,j})$. Alors

$$DM = \begin{pmatrix} 2m_{1,1} & 2m_{1,2} & 2m_{1,3} \\ 2m_{2,1} & 2m_{2,2} & 2m_{2,3} \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & -m_{3,3} \end{pmatrix} \text{ et } MD = \begin{pmatrix} 2m_{1,1} & 2m_{1,2} & -m_{1,3} \\ 2m_{2,1} & 2m_{2,2} & -m_{2,3} \\ 2m_{3,1} & 2m_{3,2} & -m_{3,3} \end{pmatrix}$$

et donc la relation

$$DM + MD = \begin{pmatrix} 4m_{1,1} & 4m_{1,2} & m_{1,3} \\ 4m_{2,1} & 4m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & -2m_{3,3} \end{pmatrix} = 0$$

implique que tous les coefficients de M sont nuls, c'est-à-dire que $\mathcal{A}_D = \{0\}$.

On observe ensuite qu' en écrivant $A = P^{-1}DP$ il vient

$$AM + MA = P^{-1}\Big(D(PMP^{-1}) + (PMP^{-1})D\Big)P,$$

de sorte que si $M \in \mathcal{A}_A$ alors $PMP^{-1} \in \mathcal{A}_D$ et donc $M = 0$. On a donc aussi $\mathcal{A}_A = \{0\}$.

Exercice 3

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que son polynôme minimal m se factorise en $m = XP$, où P est un polynôme tel que $P(0) \neq 0$.

Montrer que $\ker u \oplus \text{ Im } u = E$.

Corrigé

En utilisant le lemme des noyaux, on a que

$$\ker u \oplus \ker P(u) = \ker m(u) = E, \tag{1}$$

puisque $m(u) = 0$.

Montrons que $\text{ Im } u \subset \ker P(u)$: soit $x \in E$, alors

$$P(u)(u(x)) = \Big((XP)(u)\Big)(x) = m(u)(x) = 0,$$

ce qui montre que $u(x) \in \ker P(u)$ et donc

$$\text{Im } \subset \ker P(u). \tag{2}$$

Par le théorème du rang on a $\dim \ker u + \dim \text{ Im } u = \dim E$, et par ailleurs (1) implique que $\dim \ker u + \dim \ker P(u) = \dim E$. On en déduit que les espaces $\text{ Im } u$ et $\ker P(u)$ ont la même dimension, et au vu de (2), qu'ils sont égaux. En combinant avec (1) on a bien $\ker u \oplus \text{ Im } u = E$.

Exercice 4

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $PAP^{-1} = B$.

1. En décomposant P en $P = P_1 + iP_2$ avec P_1 et P_2 dans $M_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det(P_1 + \lambda P_2) \neq 0$.
2. Conclure qu'il existe Q dans $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^{-1}AQ = B$.

Corrigé

1. On observe que $\det(P_1 + XP_2)$ est un polynôme à coefficients réels en l'indéterminée X, non nul puisque la valeur en i est non nulle. Par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det(P_1 + \lambda P_2) \neq 0$.
2. On observe qu'en distinguant parties rélles et imaginaires de la relation $PA = BP$, qui est une conséquence immédiate de $PAP^{-1} = B$, on a d'une part $P_1A = BP_1$ et d'autre part $P_2A = BP_2$. Il suit que $(P_1 + \lambda P_2)A = B(P_1 + \lambda P_2)$. On pose alors $Q = (P_1 + \lambda P_2)^{-1}$, qui est bien dans $GL_n(\mathbb{R})$ et tel que $Q^{-1}AQ = B$.

Exercice 5

Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$ et

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, calculer $P(B)$ en fonction de A.
2. En déduire que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

Corrigé

1. On montre par récurrence sur k que

   $$B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

   Par linéarité on en déduit que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

   $$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. Evidemment si $A = 0$, on a $B = 0$ qui est donc bien diagonalisable. Réciproquement si B est diagonalisable alors il existe un polynôme P annulateur scindé à racines simples. Le calcul précédent montre que P est alors aussi un polynôme annulateur de A. On a aussi que $AP'(A) = 0$. Si λ est valeur propre de A alors il existe un vecteur x non nul tel que $Ax = \lambda x$. Il en découle (en montrant $A^k x = \lambda^k x$ par récurrence sur k et en utilisant la linéarité) que $0 = AP'(A)x = \lambda P'(\lambda)x$ et donc $\lambda P'(\lambda) = 0$. Or P est à racines simples, donc $P'(\lambda) \neq 0$, et donc $\lambda = 0$. Par conséquent A est diagonalisable avec 0 pour seule valeur propre, ceci entraîne que $A = 0$.