N1MA3W01 Algèbre 2 - Partiel 1
Lundi 20 Octobre 2014, 17h-18h30

Exercice 1 (sur 4,5 points)

1. Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
n'est pas diagonalisable.
2. Trouver deux matrices diagonalisables de somme non diagonalisable.
3. Trouver deux matrices diagonalisables de produit non diagonalisable.

Exercice 2 (sur 6,5 points)

Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'ensemble suivant
$$\{M \in M_3(\mathbb{R})/ \quad AM + MA = 0\}.$$
On pourra commencer par traiter le cas où on substitue à A sa forme diagonale.

Exercice 3 (sur 4,5 points)

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que son polynôme minimal m se factorise en $m = XP$, où P est un polynôme tel que $P(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\ker u \oplus \ker P(u) = E$. On pourra utiliser le lemme des noyaux.
2. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \ker P(u)$.
3. Montrer que les espaces $\operatorname{Im} u$ et $\ker P(u)$ ont la même dimension.

4. Conclure que $\ker u \oplus \text{ Im } u = E$.

Exercice 4 (sur 4,5 points)

Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$ et
$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}),$$
où 0_n désigne la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ remplie de 0.

1. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors
$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$
On pourra commencer par traiter le cas où $P(X) = X^k$, avec $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et λ est valeur propre de A associé au vecteur propre x alors $AP'(A)x = \lambda P'(\lambda)x$
3. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ scindé à racines simples annulateur de B. Montrer que A est diagonalisable avec 0 pour seule valeur propre.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Exercice 5 - Bonus (jusqu'à 4 points)

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $PAP^{-1} = B$.

1. En décomposant P en $P = P_1 + iP_2$ avec P_1 et P_2 dans $M_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det(P_1 + \lambda P_2) \neq 0$.
2. Conclure qu'il existe Q dans $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $QAQ^{-1} = B$.