N1MA3W01 Algèbre 2 - Partiel 3
Lundi 17 Novembre 2014, 17h-18h30

Exercice 1 (sur 6 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs et vecteurs propres de la matrice
$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
2. Calculer les valeurs et vecteurs propres de la matrice
$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
3. En déduire les valeurs et vecteurs propres de la matrice A.
4. Trigonaliser A.

Exercice 2 (sur 4 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K, muni de la base $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$, et soit $\beta^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale. On pose pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, pour tout x, y dans E,

$$\varphi_{i,j}(x, y) := e_i^*(x)e_j^*(y).$$

1. Montrer que $\varphi_{i,j}$ est une forme bilinéaire.
2. Déterminer la matrice de $\varphi_{i,j}$ dans la base β.

Exercice 3 (sur 6 points)

On note, pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^3$,

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

1. Montrer que q définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la forme polaire de cette forme quadratique.
3. Déterminer son rang et son noyau.

Exercice 4 (sur 4 points)

Soit φ l'application de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(A, B) = \det(A + B) - \det(A - B).$$

On rappelle que la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est constituée des matrices dont un seul coefficient est 1 et les autres sont nuls.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.