ANNEE UNIVERSITAIRE 2016 / 2017
S1 D'AUTOMNE
Epreuve : Algèbre 2 - Partiel 1
Date : Vendredi 14 Octobre 2016
Heure : 9h20-10h50 Durée : 1h30
Lieu : A22 Amphi Wegener
Documents : non autorisés
Epreuve de M : Sueur
Surveillants : Jean-Jacques Ruch et Raphael Hochard
Collège Sciences et technologies

La clarté de la présentation et des explications sera notée sur 2 points, portant le total des points à 20.

Il est possible d'admettre le résultat d'une question et de passer à la question suivante.

Exercice 1 (sur $1 + 2 = 3$ points)

Soit $(G, *)$ un groupe et g_1, g_2 deux éléments de G.

1. Exprimer l'inverse de $g_1 * g_2$ en fonction des inverses de g_1 et de g_2.
2. On suppose que g_1, g_2 et $g_1 * g_2$ sont d'ordre deux. Montrer que $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

Correction.

1. On observe que $g_1 * g_2 * g_2^{-1} * g_1^{-1} = g_1 * g_1^{-1} = e$ en utilisant que $g_2 * g_2^{-1} = e$. Ainsi $(g_1 * g_2)^{-1} = g_2^{-1} * g_1^{-1}$.
2. Comme on suppose que g_1, g_2 et $g_1 * g_2$ sont d'ordre deux, on a $g_1^{-1} = g_1$, $g_2^{-1} = g_2$ et $(g_1 * g_2)^{-1} = g_1 * g_2$. En combinant les deux premières informations avec la première question on obtient $(g_1 * g_2)^{-1} = g_2 * g_1$. Par conséquent $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

Exercice 2 (sur $2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$ points)

1. Soient F et G des polynômes non constants à coefficients entiers. Montrer qu'il existe Q et R dans $\mathbb{Q}[X]$ ainsi qu'un entier m tels que $G = QF + R$, $\deg R < \deg F$ et tels que mQ et mR sont à coefficients entiers.
2. Montrer que si pour un entier n, l'entier $F(n)$ divise l'entier $G(n)$ alors $\frac{mR(n)}{F(n)}$ est un entier.
3. Montrer que $\frac{mR(n)}{F(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
4. On suppose que l'entier $F(n)$ divise l'entier $G(n)$ pour une infinité d'entiers n. Montrer que $\frac{mR(n)}{F(n)}$ est nul pour une infinité d'entiers n.
5. En déduire que F divise G dans $\mathbb{Q}[X]$.

Correction.

1. En faisant la division euclidienne dans $Q[X]$ on obtient l'existence de Q et R dans $Q[X]$ tels que $G = QF + R$ avec $\deg R < \deg F$. Ensuite mQ et mR sont à coefficients entiers pour un entier m convenable, par exemple le ppcm des dénominateurs des coefficients de Q et R.
2. On a pour tout n, $G(n) = Q(n)F(n) + R(n)$ et donc
$$\frac{mG(n)}{F(n)} = mQ(n) + \frac{mR(n)}{F(n)}.$$
Pour tout entier n tel que $F(n)$ divise $G(n)$ on a $\frac{G(n)}{F(n)}$ est entier donc $\frac{mG(n)}{F(n)}$ est aussi entier, et $mQ(n)$ est entier parce que mQ

est à coefficients entiers. Par conséquent

$$\frac{mR(n)}{F(n)} = \frac{mG(n)}{F(n)} - mQ(n)$$

est entier.

3. Comme $\deg R < \deg F$ et que F est un polynôme non constant, on a que $\frac{mR(n)}{F(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
4. Comme $\frac{mR(n)}{F(n)}$ est un entier pour une infinité d'entiers n et que $\frac{mR(n)}{F(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini on a $\frac{mR(n)}{F(n)} = 0$ à partir d'un certain rang parmi ces entiers.
5. On a donc que R admet une infinité de racines et donc $R = 0$, ce qui permet de conclure.

Exercice 3 (sur 2 points)

Quelle est la définition d'un anneau ?

Exercice 4 (sur $2 + 2 = 4$ points)

1. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que $(-1)^{\sum_{j=1}^{n} (j+\sigma(j))} = 1$.
2. Soit $A := (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B := (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $b_{i,j} := (-1)^{i+j}\, a_{i,j}$. Montrer que $\det B = \det A$.

Correction.

1. On a

$$\sum_{j=1}^{n} (j + \sigma(j)) = \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} \sigma(j) = \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{k=1}^{n} k$$

en posant $k = \sigma(j)$ qui parcourt bien l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, sans répétition. Ainsi

$$\sum_{j=1}^{n} (j + \sigma(j)) = 2 \sum_{j=1}^{n} j$$

est pair et donc $(-1)^{\sum_{j=1}^{n} (j+\sigma(j))} = 1$.

2. Par définition

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} b_{j\sigma(j)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (-1)^{j+\sigma(j)} a_{j\sigma(j)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \Big(\prod_{j=1}^{n} (-1)^{j+\sigma(j)} \Big) \Big(\prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)} \Big) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \Big((-1)^{\sum_{j=1}^{n} (j+\sigma(j))} \Big) \Big(\prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)} \Big) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}
\end{aligned}$$

avec la question précédente, ce qui donne $\det(B) = \det A$.

Exercice 5 (sur 2 points)

On considère $n \geqslant 3$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des complexes. Calculer $\det(a_i + b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Correction.

On note C le vecteur colonne avec les a_i comme coefficients et D le vecteur colonne avec des 1 partout. Alors la matrice $(a_i + b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ a pour colonnes $C + b_j D$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Ainsi toutes les colonnes sont dans Vect (C, D) qui est de dimension au plus 2. Ainsi les n colonnes sont liés et donc $\det(a_i + b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 0$.