ANNEE UNIVERSITAIRE 2016 / 2017
S1 D'AUTOMNE
Epreuve : Algèbre 2 - Partiel 2
Date : vendredi 25 novembre
Heure : 9 h 20 à 10 h 50
Lieu : A22 Amphi Wegener
Documents : non autorisés
Epreuve de M : Sueur
Surveillants : Jonathan Harter et Manon Deville
Collège Sciences et technologies

Exercice 1 **(sur** 3 **points)**

On considère la matrice

$$M := \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix},$$

où a, c et d sont des valeurs réelles. Pour quelles valeurs la matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Correction

On calcule le polynôme caractéristique qui vaut $\chi_M(X) = X^2 - (a+d)X + ad - c^2$. Son discriminant est donc $(a-d)^2 + 4c^2$ qui est strictement positif si $c \neq$ et alors le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si $c = 0$, la matrice M est diagonale.

Exercice 2 (sur $2+2+2+1+1+3 = 11$ points)

On considère la matrice

$$M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M_3 et les valeurs propres de M_3.
2. Déterminer les sous-espaces propres de M_3.
3. Quels sont les sous-espaces caractéristiques de M_3 ? Quel est le polynôme minimal de M_3 ?
4. On considère un entier $n \geqslant 4$ et M_n la matrice carrée de taille n dont chaque coefficient vaut 1. La matrice M_n est-elle inversible ?
5. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M_n. On pourra utiliser le vecteur $(1, \ldots, 1)$.
6. Soient $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des nombres complexes non nuls. On considère la matrice
$$A := (\frac{\lambda_i}{\lambda_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$
et la matrice diagonale $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Déterminer $D^{-1}AD$ et en déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.

Correction

1. On obtient que $P_M(X) := \det(M - XI_3)$ vaut $P_M(X) = X^2(3-X)$. Ainsi les valeurs propres sont 3 et 0.
2. Le sous-espace propre associé à 0 est le plan d'équation cartésienne $x+y+z = 0$. Le sous-espace propre associé à 3 est Vect $(1, 1, 1)$.

3. Comme le résultat précédent implique que M est diagonalisable on a que les sous-espaces caractéristiques coincident avec les sous-espaces propres et que le polynôme minimal de M est $m_M(X) = X(X-3)$.

4. La matrice M_n est de rang 1, elle n'est donc pas inversible. En fait 0 avec un sous-espace propre de dimension $n-1$, d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$.

5. On observe aussi que n est un sous-espace propre de dimension 1, engendré par le vecteur $(1, \ldots, 1)$.

6. Comme les λ_i sont non nuls, la matrice D est inversible et on observe que $A = DM_nD^{-1}$. Comme $1 + n - 1 = n$, les sous-espaces propres sont en somme directe et la matrice M_n est diagonalisable. Par conséquent la matrice A qui lui est conjuguée, est aussi diagonalisable avec n et 0 comme valeurs propres. De plus le sous-espace propre de la matrice A associé à la valeur propre 1 est engendré par le vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et le sous-espace propre de la matrice A associé à la valeur propre 0 est l'hyperplan d'équation $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$.

Exercice 3 (sur $1+1+1=3$ points)

Soit A une matrice carrée, réelle ou complexe.

1. Rappeler pourquoi A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres.

2. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $A - \lambda Id_n$ et $A + \lambda Id_n$ soient inversibles.

3. Montrer que A peut s'écrire comme la somme de deux matrices inversibles.

Correction

Soit A une matrice carrée, réelle ou complexe de taille n.

1. On peut donner beaucoup d'arguments ! L'un deux est que la somme des sous-espaces propres étant en somme directe, les dimensions s'ajoutent sachant que chacune est plus grande que 1 et que leur somme est inférieur ou égale à n.

2. Comme A et $-A$ ont chacune un nombre fini de valeurs propres il existe un scalaire λ tel que $A - \lambda Id_n$ et $-A - \lambda Id_n$ soient inversibles.
3. Donc
$$A = \frac{A - \lambda Id_n}{2} + \frac{A + \lambda Id_n}{2}$$
est bien la somme de deux matrices inversibles.

Exercice 4 (sur 3 points)

On considère une matrice A dans $M_9(\mathbb{R})$ qui vérifie $A^3 - 7A = -6I_3$. Montrer que A ne peut avoir au plus que 3 valeurs propres distinctes.

Correction

On observe que si λ est valeur propre propre de A associé au vecteur propre $X \neq 0$ alors $0 = (A^3 - 7A + 6I_3)X = (\lambda^3 - 7\lambda + 6)X$. On en déduit que $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$. On voit que $\lambda = 1$ est racine évidente et on factorise en $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 6) = (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 2)$. Ainsi A ne peut avoir au plus que 3 valeurs propres distinctes : 1, 2 et -3.