I.U.T. de Bordeaux **Département G.M.P.**

MÉTHODOLOGIE M1306

MATHÉMATIQUES

La formation que vous allez suivre en GMP est exigeante, avec des matières nombreuses et variées, pour un gros volume horaire. En mathématiques, vous allez devoir assimiler des outils nouveaux en peu de temps (par semaine, 1h de cours et 1h45 de td, plus quelques tp). Voici des **points de méthode clés pour réussir** :

1. **Organisez bien votre temps** : soyez le plus *concentré* et *actif* possible en cours. Ménagez-vous une plage de 2h à 3h par semaine chez vous pour reprendre le cours (relire, souligner) et faire les exercices demandés.
2. **Soyez efficace** : relisez les cours *et* exercices pour bien comprendre. Faites les exercices *avec* le cours à côté. Lors des contrôles, lisez l'énoncé d'un exercice en entier puis faites soigneusement les premières questions. Si vous bloquez, insistez un moment, puis passez à une autre question sans paniquer. Vous pourrez peut-être revenir à la question bloquante plus tard.
3. **Apprenez et comprenez votre cours** : sans cela, pas de résolution d'exercices possible ! Les *définitions* précisent « de quoi on parle », illustrées par des *exemples*. Les *théorèmes* expriment les résultats, les « outils », que vous pourrez utiliser dans le cadre d'*exercices* typiques vus en cours et en td. Avant les contrôles, faites des *fiches de synthèse* par chapitre.
4. **Sachez travailler en groupe** : lisez l'énoncé et trouvez la solution *ensemble*, en vous posant mutuellement des questions, en mettant vos idées en commun, pour être plus forts et efficaces, en prenant des notes au brouillon. Ensuite seulement, partagez vous le travail de rédaction au propre, puis enfin faites vous relire les uns les autres.
5. **Sachez résoudre des problèmes** : c'est le but de votre apprentissage en mathématiques. Commencez par lire en entier l'énoncé d'un exercice, en repérant les mots clés, les liens entre les différentes questions. Pour chaque question, identifiez ce que vous devez trouver, *l'inconnue*, avec quelles *hypothèses*, quels *mots-clés*. Cela vous indiquera quels sont les *outils* dont vous disposez. Faites ensuite une tentative de résolution au *brouillon* avant de rédiger au propre. Pensez à vérifier la *cohérence* des résultats !
6. **Sachez rédiger un devoir** : il est essentiel de se mettre à la place du lecteur ! Respectez la numérotation des questions. Votre rendu doit être *propre* et *claire*, avec un *plan* visible. Commencez en identifiant l'inconnue et les hypothèses. Développez ensuite le raisonnement pas à pas, en justifiant toutes les étapes. Enfin, soulignez vos conclusions. Respectez les *notations* données et, si vous en rajoutez, définissez les précisément.
7. **Sachez analyser vos erreurs** : vous devez *relire soigneusement* ce que vous avez rédigé. Apprenez à *connaître vos erreurs* pour y remédier : faute de calcul, connaissance insuffisante, erreur d'inattention, affirmation non justifiée, erreur de raisonnement, erreur de rédaction, etc. Faites bien attention à la *cohérence* de vos résultats, utilisez votre « bon sens » (par exemple, une longueur est toujours positive).

TP1 Calcul vectoriel

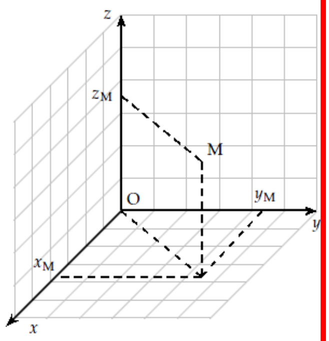
I Produit scalaire dans l'espace :

1°) Repère et coordonnées dans l'espace :

Définitions :

● Un repère de l'espace est composé d'un point appelé **origine** du repère et de trois vecteurs **non coplanaires**.

● Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de l'espace.



Pour tout point M de l'espace il existe trois nombres réels x_M , y_M et z_M tels que : $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$.

Les trois réels sont **uniques** et appelés **coordonnées** du point M dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

x_M est **l'abscisse** du point M ; y_M est l'**ordonnée** du point M et z_M est **la cote** du point M.

● Le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère **orthonormal** si et seulement si $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$ et les vecteurs $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.

Propriétés :

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère. Soient A($x_A;y_A;z_A$) et B($x_B;y_B;z_B$) deux points et $\vec{u}\left(x;y:z\right)$ un vecteur.

● $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A;y_B - y_A;z_B - z_A\right)$.

● Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{y_A + y_B}{2};\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

● $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Attention **le repère doit être orthonormal.**

2°) Généralisation du produit scalaire dans l'espace :

Remarque importante :

Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires. En effet soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, il existe toujours trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et par trois points il passe au moins un plan. (Par trois points **non alignés** il ne passe qu'un seul plan !)

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **le nombre réel** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$

Conséquences importantes :

● $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \cos\left(\vec{v};\vec{u}\right)$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

● $\vec{u}\cdot\vec{u} = \left(\vec{u}\right)^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2$

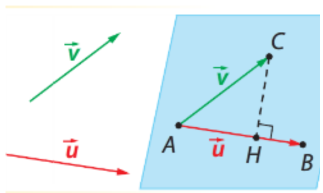
● $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ si et seulement la mesure principale de $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

● $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ si et seulement la mesure principale de $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ appartient à $\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

● $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Produit scalaire et projeté orthogonal :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$



Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

II Propriétés du produit scalaire :

1°) Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé :

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé. Soient $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ deux vecteurs.

Propriété :
$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

Conséquence :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'+zz'=0$

2°) Propriétés algébriques :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.

- $\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$
- $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

III Orthogonalité dans l'espace :

1°) Droites orthogonales :

Propriétés :
Deux droites (d) et (d') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{u}'=0$.

2°) Orthogonalité d'une droite et d'un plan :

Propriété :
Une droite (d) est orthogonale à un plan ($\mathscr{P}$)
si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan ($\mathscr{P}$).

3°) Vecteur normal à un plan :

Définition :
Soit ($\mathscr{P}$) un plan. On appelle vecteur normal au plan ($\mathscr{P}$) tout vecteur directeur $\vec{n}$ d'une droite orthogonale au plan ($\mathscr{P}$).

Théorème :
Soit ($\mathscr{P}$) un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et A un point de ce plan.
Le plan ($\mathscr{P}$) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Équation cartésienne d'un plan :
L'équation cartésienne d'un plan (P) est de la forme : $ax+by+cz+d=0$ avec a, b et c non tous nuls.
Le vecteur $\vec{n}\left(a;b;c\right)$ est alors un vecteur normal de ce plan (P).

Théorème :
Deux plans ($\mathscr{P}_1$) et ($\mathscr{P}_2$) de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont perpendiculaires
si et seulement si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux c'est-à-dire si et seulement si $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

Exercices d'applications

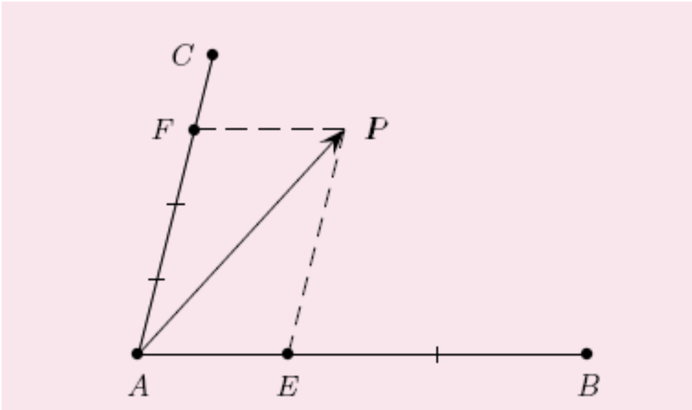
Exercice 1 :

Soient A et B deux points distincts.

1°) Construire le point P tel que $2\overrightarrow{PA} - 3\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB}$.

2°) Démontrer que les points A, B et P sont alignés.

Exercice 2 :

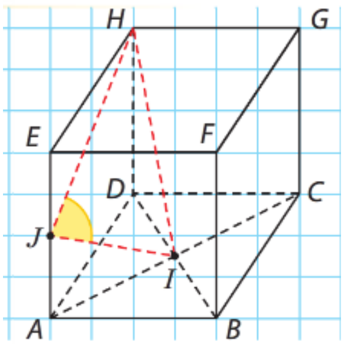


1°) En utilisant la figure ci-dessus exprimer le $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

2°) a) Construire le point Q tel que $\overrightarrow{AQ} = {}^4/_3\,\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CA}$.

a) Démontrer que les points A, P et Q sont alignés.

Exercice 3 :



Soit ABCDEFGH un cube d'arête a cm.

J est le centre de la face ABCD et J est le milieu du segment [AE].

1. Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CB}$

2. Calculer la mesure des angles $\widehat{IJH}$ et $\widehat{HJB}$ au degré près.

Exercice 4 :

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé. Soient $A(3;-1;4)$; $B(0;5;1)$ et $C(0;-1;-1)$ trois points et le vecteur $\vec{n}(5;1;-3)$.

1. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 5 :

Soit $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}(1;1;-1)$ et $A(-1;2;0)$ un point de ce plan.

1. Déterminer son équation cartésienne.
2. Déterminer un couple de vecteurs directeurs du plan $(\mathscr{P})$.

Exercice 6 :

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé. Deux plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ont pour équations cartésiennes respectives :

$2x+y+1=0$ et $-\frac{1}{2}x+y+\frac{3}{2}z-4=0$. Démontrer que $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont perpendiculaires.

Exercice 7 :

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB=6, AD=4 et AE=2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AK}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(2;2;-9)$ est un vecteur normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).

Exercice 8 :

Vrai ou faux : justifier vos réponses.

1. Les plans ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{P}'$) ont pour équations cartésiennes respectives $2x+3y-z-11=0$ et $x+y+5z-11=0$.

Affirmation : Les plans ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{P}'$) se coupent perpendiculairement.

2. Soit ($\mathscr{P}$) le plan d'équation cartésienne $x-y+3z+1=0$ et $A(1;1;0)$; $B(3;0;-1)$ et $C(7;1;-2)$ trois points.

Affirmation : Les plans ($\mathscr{P}$) et (ABC) sont parallèles.

Points de méthode :

● **Attention** : tout exercice à connotation géométrique doit impérativement s'accompagner d'un dessin !

● Vous êtes tenus de connaître et savoir combiner les multiples formules de trigonométrie.

TP 2 – Trigonométrie

Durée prévue : 3 heures

Les exercices sont parsemés de rappels de cours. Libre à vous de les utiliser ou non.
Ce TP contient des exercices d'une part, et des rappels de cours parfois à compléter d'autre part.

1 Exercices de base

On peut définir (et c'est la définition des classes de lycée, que nous utiliserons dans la suite) le sinus et le cosinus d'un angle en utilisant le cercle trigonométrique. *Les angles sont naturellement exprimés en radians.*
Plus précisément, fixons $\theta \in \mathbf{R}$ un angle, et considérons $M(\theta)$ l'unique point fixé par les conditions suivantes (on appelle cela les coordonnées polaires, cf. le dessin ci-dessous) :

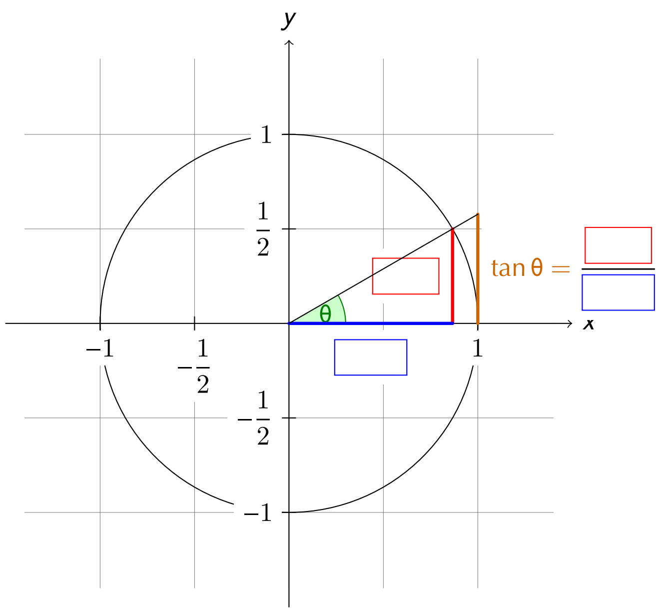
$$OM(\theta) = 1, \quad \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM(\theta)}\right) = \theta.$$

Dit autrement, dans le plan complexe $M(\theta)$ est le point d'affixe $e^{i\theta}$.

> Definition – 1.1 Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On appelle cosinus de θ noté $\cos\theta$ (*resp.* sinus de θ noté $\sin\theta$) l'abscisse du point $M(\theta)$ (*resp.* l'ordonnée de $M(\theta)$).
> Si $\theta \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$, on appellera tangente de θ, notée $\tan\theta$, la quantité $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.
> Les fonctions $\theta \in \mathbf{R} \longmapsto \cos(\theta)$ (*resp.* $\theta \in \mathbf{R} \longmapsto \sin(\theta)$) seront appelées fonction cosinus (*resp.* fonction sinus).

Par définition les fonctions cos et sin sont à valeurs dans $[-1, 1]$.

Exercice 1
Placer $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $M(\theta)$ sur le dessin ci-dessous.



Remarque – 1.1 **(i)** On a $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \boxed{}$.

(ii) Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$:

$$\cos(-\theta) = \boxed{}, \quad \sin(-\theta) = \boxed{},$$

$$\tan(-\theta) = \boxed{}.$$

(iii) Les fonctions ainsi définies sont $\boxed{}$-périodiques : *i.e.*pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a

$$\cos\left(\theta + \boxed{}\right) = \cos(\theta), \quad \sin\left(\theta + \boxed{}\right) = \sin(\theta).$$

Ceci découle du fait que $M(\theta) = M(\theta + \boxed{})$ pour tout θ.

(iv) Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a

$$\tan\left(\theta + \boxed{}\right) = \tan(\theta).$$

Ainsi la fonction tan est $\boxed{}$-périodique.

Exercice 2 (Tableau des valeurs remarquables)

Compléter le tableau suivant avec des éléments de l'ensemble $\left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}\right\}$.

♣ Indication – On pourra constater que $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ et se servir du cercle trigonométrique.

Fonction	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$
cos			
sin			
tan			

Les formules suivantes se démontrent en utilisant par exemple le produit scalaire connu depuis le lycée et ses propriétés. Nous ne reviendrons pas sur les démonstrations.
Il convient de connaître ces formules par coeur, au moins celles-ci, afin de retrouver les autres en cas d'urgence. Pour les retenir on aura notamment en tête que :

le cosinus ne mélange pas cos et sin, *mais* permute le signe
le sinus mélange cos et sin, *mais* conserve le signe

Proposition – 1.1 (Addition / Soustraction) Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),\\
\cos(a-b) &= \boxed{},\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a),\\
\sin(a-b) &= \boxed{}.
\end{aligned}$$

On en déduit :

Corollaire – 1.1 (Linéarisation : Produit $\to$ Somme) Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right),\\
\cos(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right),\\
\sin(a)\cos(b) &= \boxed{},\\
\sin(a)\sin(b) &= \boxed{}.
\end{aligned}$$

Exercice 3
1) Compléter la Proposition 1.1 et le Corollaire 1.1.
2) Comment transformer $\cos(x) + \cos(y)$ en un produit pour tous $x, y \in \mathbf{R}$?

Exercice 4
1) En analysant le cercle trigonométrique, compléter les formules ci-dessous : pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \boxed{}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \boxed{}$.
2) De-même pour
$\cos(x+\pi) = \boxed{}$, $\sin(x+\pi) = \boxed{}$.
3) Retrouver ces formules en utilisant la Proposition 1.1.

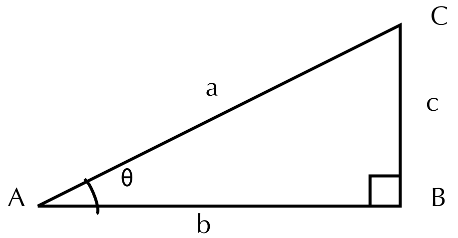
Corollaire – 1.2 (Duplication) Soit $x \in \mathbf{R}$, alors

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x, \quad \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Exercice 5
Prouver les formules de duplication à l'aide de ce qui précède.

2 Exercices à coloration géométrique

Depuis la classe de troisième, vous savez que dans un triangle *rectangle* on peut exprimer le cosinus ou sinus d'un angle en fonction des longueurs de certains côtés.



On peut démontrer, en partant de la définition initiale, que l'on a les formules ci-contre.

> Proposition – 2.1 Si ABC est rectangle en A, alors
> $$\cos\theta = \frac{b}{a}, \quad \sin\theta = \frac{c}{a}, \quad \tan\theta = \boxed{}.$$

Remarque – 2.1 Dans le cas où l'hypoténuse vaut $a = 1$, on retrouve bien que $\cos\theta$ est le côté adjacent (*i.e.* l'absisse de $C = M(\theta)$), et $\sin\theta$ est le côté opposé (*i.e.* l'ordonnée de $C = M(\theta)$).

Exercice 6
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, deux points A et B sont placés sur le cercle trigonométrique. L'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OA}$ et le vecteur $\overrightarrow{OI}$ mesure $\frac{\pi}{4}$. L'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OB}$ et le vecteur $\overrightarrow{OI}$ mesure $\frac{\pi}{6}$.

1) Faire une figure.

2) Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans $\mathcal{R}$?

3) Quel est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$?

4) Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ de deux manières différentes (à l'aide de la définition et à l'aide des coordonnées des vecteurs) et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

⋈ Rappel – Par définition, on a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. ⋈

5) Retrouver cette expression à l'aide d'une formule de trigonométrie et d'une valeur remarquable du tableau de début de cours.

3 Exercices de résolutions d'équations

On rappelle les ensembles solution des équations trigonométriques ci-dessous :

> Proposition – 3.1 Soient $x, a \in \mathbf{R}$. Alors :
> $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,
> $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 7

1) À l'aide du cercle trigonométrique, illustrer la Proposition 3.1.

2) Déterminer les couples (x, a) vérifiant $\cos x = \sin a$.

3) En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les solutions de l'équation $\tan x = \tan a$.

Exercice 8
Résoudre les équations :

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x, \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 9
Soit A la fonction définie par : $A(x) = \sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1) Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $A(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

2) En déduire les solutions de l'équation $A(x) = 0$.

Exercice 10
Résoudre : $\cos(2x) - 3\cos x + 2 = 0$.

TP3

A) ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS :

Méthode de résolution d'équations : penser à simplifier et/ou factoriser les expressions (identités remarquables, formules de trigo) ; produit en croix pour se débarrasser d'un quotient ;
Méthode de résolution d'inéquations : comme pour les équations mais **attention** au changement de sens des inégalités pour division/multiplication par un nombre négatif ; règle du signe des équations de degré 2.

Exercice n°1 :

Résoudre les équations suivantes :

1°) $(5-2x)^2=(2x-5)(x-2)$.

2°) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{1}{x}$.

3°) $x^3=6x+40$.

Exercice n°2 :

Résoudre les inéquations suivantes :

1°) $x+1<\sqrt{x+2}$.

2°) $3x^3+5x^2-7x-1\geq 0$.

Exercice n°3 :

Déterminer toutes les valeurs de m telles que pour tout réel x on ait : $(2m-3)x^2-2mx-1<0$.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty]$ par $f(x)=7ae^{2x}-3b\ln(x+1)+5b$ avec a et b deux réels.
Déterminer a et b sachant que $A(0;1)\in C_f$ et que $f'(0)=1$.

B) FONCTIONS ET OPTIMISATION :

Exercice n°1 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-x+3$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-2x-5$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

Exercice n°2 :

1°) Rappeler le tableau de variation des fonctions exp et ln sur leur domaine de définition.

2°) Recopier et compléter les limites usuelles suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=$

3°) Calculer les limites suivantes :

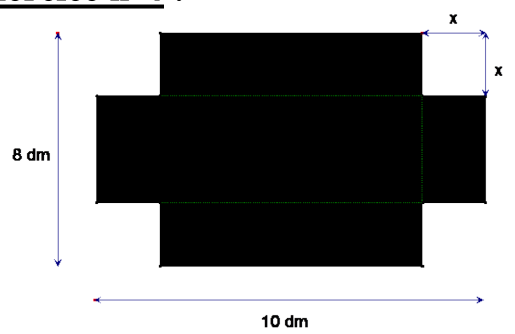
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\ln(2x)}{2x-1}$

Exercice n°3 :

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\frac{1}{x}\ ;\ f_2(x)=\frac{1}{2x-3}\ ;\ f_3(x)=\frac{5x-1}{x^2-2}\ ;\ f_4(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ ;\ f_5(x)=\frac{1}{\sqrt{5x-3}}\ ;\ f_6(x)=\frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

Exercice n°4 :



Avec une plaque en carton rectangulaire de 8dm par 10dm, en découpant quatre carrés identiques, on obtient le patron d'une boite sans couvercle.
On appelle x la longueur du côté des carrés à découper en dm.
Déterminer x pour obtenir une boite de volume maximum.

Exercice Bonus 1 :

$g(x)=\ln\left(x^2-1\right)$

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction g.

2°) Étudier la parité de la fonction g . Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

3°) Établir le tableau de variation complet de la fonction g.

4°) Tracer la courbe représentative de la fonction g.

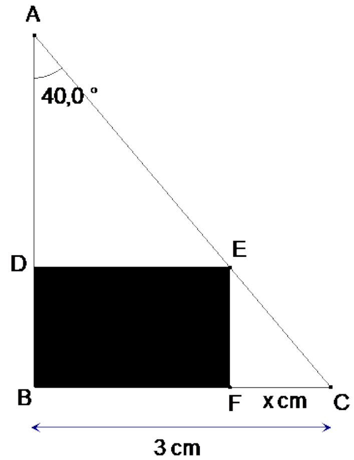
5°) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative de g au point d'abscisse 2, et tracer (T).

6°) Résoudre l'équation $g(x)=0$

Exercice Bonus 2 :

Soit ABC un triangle rectangle en B. Soit D un point du segment [AB] et E un point du segment [AC] tels que (DE) $\perp$ (AB).
Soit F un point du segment [BC] tel que (FE) $\perp$ (DE).
On note x la longueur du segment [FC].
On a $\widehat{BAC}=40°$ et BC=3cm.

Déterminer x pour que l'aire du rectangle DEFB soit maximale.



TP4 –Intégration

Exercice n°1 : Cet exercice est indispensable pour la suite !

Trouver les primitives des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 5$

$f_2(x) = 5x^3 + \dfrac{1}{x}$

$f_3(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^3}$

$f_4(x) = -\cos x + \sin x$

$f_5(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$

$f_6(x) = (x^3+3x+1)^3(x^2+1)$

$f_7(x) = \sin x(\cos x)^3$

$f_8(x) = 3x + 2 - \dfrac{1}{(3x+1)^2}$

$f_9(x) = (x+1)^2 + \sqrt{3x+1} + \dfrac{2}{x-1}$

$f_{10}(x) = -\cos(3x) + \dfrac{1}{3}\sin(2x)$

$f_{11}(x) = 2\cos(3x+5)$

$f_{12}(x) = e^{3x} - e^{4x}$

$f_{13}(x) = e^{3x} - \dfrac{e^{1/x}}{x^2} + \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

$f_{14}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice n°2 :

On pose $I = \int_0^1 xe^{x-1}dx$.

1°) Soient a et b deux réels. Pour tout réel x on pose $G(x) = (ax+b)e^{x-1}$.

Déterminer les réels a et b pour que $G(x)$ soit une primitive de la fonction g définie par $g(x) = xe^{x-1}$.

2°) Calculer I.

Exercice n°3 :

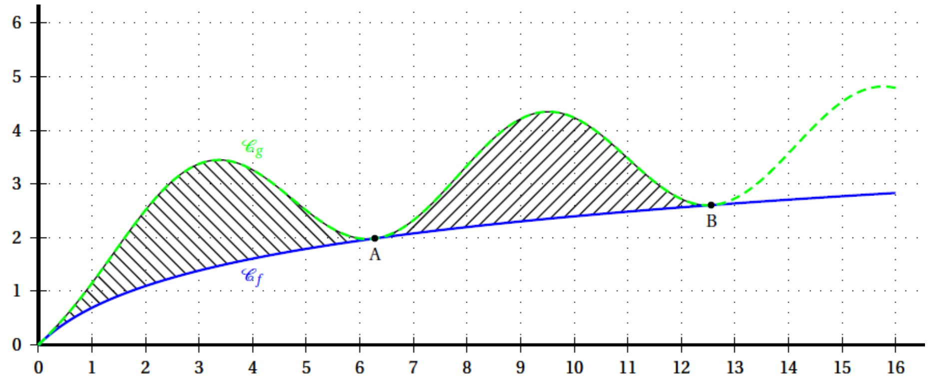
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1-x}}$.

Démontrer que pour tout x on a $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e}$ et en déduire le calcul de $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice n°4 :

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;16]$ par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$. On a tracé leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées :



Formulaire

Analyse :

➢ Identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

➢ Équations du second degré dans $\mathbb{C}$:

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

● Si $\Delta > 0$ alors il y a deux solutions réelles qui sont $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

De plus $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ qui est du signe de a à l'extérieur des racines.

● Si $\Delta = 0$ alors il y a une solution réelle (appelée racine double) qui est $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

De plus $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ qui est du signe de a.

● Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solution réelle. De plus $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.
Il y a 2 solutions complexes :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

➢ Propriétés de la fonction exponentielle :

$e^x > 0$; $e^0 = 1$ $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^n = e^{na}$

➢ Propriétés de la fonction logarithme népérien :

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$; $\ln x < 0 \Leftrightarrow x \in]0;1[$; $\ln 1 = 0$;

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$: $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^n) = n\ln(a)$

➢ Équation de la tangente en un point :

L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

➢ Produit scalaire :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$
Soit $(0;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

- **Primitives :**

Fonction (x est la variable)	Primitive à une constante près	Fonction (u est une fonction de x)	Primitive à une constante près
e^x	e^x	$u'\,e^u$	e^u
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$x^\alpha \quad \alpha\neq-1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u'u^\alpha \quad \alpha\neq-1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\cos x$	$\sin x$	$u'\cos u$	$\sin u$
$\sin x$	$-\cos x$	$u'\sin u$	$-\cos u$
$1+\tan^2 x$	$\tan x$		

Trigonométrie :

- **Dans un triangle rectangle** :

$$\cos = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} \ ; \ \sin = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} \ \textbf{et} \ \tan = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ Pour $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \text{avec}\ k \in \mathbb{Z}$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

- **Duplication** :

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

- **Formules d'addition et de soustraction** :

$\sin(a+b)=\sin a\cos b + \sin b\cos a$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b - \sin b\cos a$
$\cos(a+b)=\cos a\cos b - \sin a\sin b$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b + \sin a\sin b$

- **Valeurs remarquables :**

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0