ANNEE UNIVERSITAIRE 2014 / 2015
S1 D'AUTOMNE
PARCOURS : MA300
Code UE : N1MA3W01
Epreuve : Algèbre 2
Date : Rattrapage 2015
Heure : 14h-17h Durée : 3h
Documents : non autorisés
Epreuve de M : Sueur
Collège Sciences et technologies

La clarté de la présentation sera notée sur 2 points, portant le total des points à 25, signe de ma grande bonté.

Exercice 1 (sur 3 points)

On considère c et d dans $\mathbb{C}^n \setminus 0$ et la matrice carrée B définie pour tout $i, j = 1, \ldots, n$, par $b_{i,j} := c_i d_j$. On suppose que $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})^t$ est un vecteur propre de B associé à 1 et que $(1, 2, \ldots, n)^t$ est un vecteur propre de B^t associé à 1. Déterminer B.

Correction

Les hypothèses reviennent à dire que

$$B(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})^t = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})^t, \tag{1}$$

et que

$$(1,2,\ldots,n)B = (1,2,\ldots,n). \tag{2}$$

On a, reformulant (1), que pour tout $i = 1,\ldots,n$, $\sum_{j=1}^{n} c_i d_j \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$, soit, en notant $s := \sum_{j=1}^{n} d_j$, pour tout $i = 1,\ldots,n$, $c_i = 1/s$ (observons que s ne peut pas s'annuler). Par ailleurs, reformulant (2), on a que pour tout $i = 1,\ldots,n$, $\sum_{j=1}^{n} c_j d_i j = i$, soit $d_i \frac{n(n+1)}{2} = is$. Il vient donc

$$b_{i,j} = \frac{j}{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Exercice 2 (sur $2+2+1+2$ points)

On considère, pour $k \geqslant 2$, la matrice carrée de taille $k \times k$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k} & \ddots & \ddots & \frac{1}{k} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

1. En procédant par récurrence sur la dimension de la matrice, et en utilisant un développement selon la première colonne, montrer que pour tout nombre complexe λ,

$$(-1)^k \det(A - \lambda Id) = \lambda^k - \frac{1}{k}\big(\lambda^{k-1} + \ldots + 1\big).$$

2. Montrer que 1 est une valeur propre simple de A.

3. Montrer que $(\frac{1}{k},\ldots,\frac{1}{k})$ est un vecteur propre de A associé à 1 et que $(1,2,\ldots,k)$ est un vecteur propre de la matrice transposée A^t de A associé à 1.

4. On considère $x = (x_1,\ldots,x_k)$ dans $\mathbb{C}^k \setminus 0$ un vecteur propre associé à $\lambda \neq 1$. Montrer que $x_2 = \lambda x_1$, $\ldots$, $x_k = \lambda^{k-1} x_1$, $|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j| = |\lambda| \cdot |x_k| = \ldots = \lambda^k |x_1|$.

Correction

1. On va prouver le résultat par récurrence sur la dimension de la matrice. quand celle-ci est 2, on a

$$\begin{aligned}(-1)^k \det(A-\lambda Id) &= \left|\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k}-\lambda \end{pmatrix}\right| \\ &= -\lambda(\frac{1}{k}-\lambda)-\frac{1}{k} \\ &= \lambda^2-\frac{1}{k}(\lambda+1).\end{aligned}$$

Supposons la formule établie pour une matrice de taille $k-1$. On notera A^k la matrice de l'énoncé avec une taille $k\times k$. Alors, en développant selon la première colonne,

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda Id) &= \left|\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k} & \ddots & \ddots & \frac{1}{k}-\lambda \end{pmatrix}\right| \\ &= -\lambda \det(A^{k-1}-\lambda Id)+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

de sorte qu'en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{aligned}(-1)^k \det(A-\lambda Id) &= \lambda(-1)^{k-1}\det(A^{k-1}-\lambda Id)+(-1)^{2k+1}\frac{1}{k} \\ &= \lambda\Big(\lambda^{k-1}-\frac{1}{k}\big(\lambda^{k-2}+\ldots+1\big)\Big)-\frac{1}{k} \\ &= \lambda^k-\frac{1}{k}\big(\lambda^{k-1}+\ldots+1\big).\end{aligned}$$

2. On observe, avec la question précédente, que 1 est racine du polynÙme caractéristique et donc 1 est une valeur propre de A. Par ailleurs une division euclidienne ou un calcul de la dérivée en 1 montre que 1 est racine simple.

3. On observe que

$$A(\frac{1}{k},\ldots,\frac{1}{k})^t = (\frac{1}{k},\ldots,\frac{1}{k})^t,$$

et que

$$(1,2,\ldots,k)A = (1,2,\ldots,k).$$

4. On reformule $A(x_1, \ldots, x_k)^t = (x_1, \ldots, x_k)^t$ successivement en

$$x_2 = \lambda x_1, \quad \ldots, \quad x_k = \lambda x_{k-1}, \quad \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j = \lambda x_k,$$

puis par récurrence en

$$x_2 = \lambda x_1, \quad \ldots, \quad x_k = \lambda^{k-1} x_1, \quad \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j = \lambda x_k.$$

On en déduit facilement par récurrence que $|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j| = |\lambda| \cdot |x_k| = \ldots = \lambda^k |x_1|$.

Exercice 3 (sur $2+1+1+2$ points)

Soit T dans $M_n(\mathbb{C})$ et P dans $\mathbb{C}[X]$ de degré k non nul. On note

$$\text{sp }(T) := \{\lambda \text{ valeur propre de } T\}.$$

1. On suppose que λ est dans sp (T). Montrer qu'il existe X dans $\mathbb{C}^n$ non nul tel que $P(T)X = P(\lambda)X$. On pourra commencer par traiter le cas de polynômes simples.
2. En déduire que

$$\{P(\lambda) \text{ avec } \lambda \text{ valeur propre de } T\} \subset \text{sp }(P(T)).$$

3. On considère $\tilde{\lambda}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe des complexes c, λ_1, …,λ_k avec c non nul tels que

$$P(T) - \tilde{\lambda} Id_n = c\Pi_{i=1}^{k}(T - \lambda_i\, Id_n).$$

4. En déduire que

$$\text{sp }(P(T)) \subset \{P(\lambda) \text{ avec } \lambda \text{ valeur propre de } T\}.$$

Correction

1. On décompose P en

$$P(X) = \sum_{j=0}^{k} c_j X^j.$$

Il existe X dans $\mathbb{C}^n$ non nul tel que $TX = \lambda X$. On montre par récurrence sur j que

$$T^j X = \lambda^j X.$$

On obtient alors $P(T)X = P(\lambda)X$ par linéarité.

2. Immédiat.

3. Le polynôme $P(X) - \tilde{\lambda}$ est de degré k. Par conséquent il existe des complexes c, λ_1, ...,λ_k tels que

$$P(X) - \tilde{\lambda} = c\Pi_{i=1}^{k}(X - \lambda_i).$$

Il suffit d'appliquer ce polynôme à T.

4. Si $\tilde{\lambda}$ est dans sp $(P(T))$ alors $P(T) - \tilde{\lambda}Id_n$ est non inversible et par conséquent il existe i entre 1 et k tel que $T - \lambda_i\, Id_n$ est non inversible. Ainsi λ_i est valeur propre de T et $P(\lambda_i) = \tilde{\lambda}$.

Exercice 4 (sur $1 + 1 + 1 + 2 + 2$ points)

On considère n entier naturel non nul et $\varepsilon > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on note

$$\|x\|_2^2 := x^* x,$$

où x^* est le vecteur transconjugué (transposé du conjugué) de x.

Pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on note

$$\|A\| := \max_{x \in \mathbb{C}^n \setminus 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

On définit pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\sigma_\varepsilon(A) := \{z \in \mathbb{C} / \quad \|(zI - A)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}\},$$

en convenant que $\|(zI - A)^{-1}\| = +\infty$ si $zI - A$ n'est pas inversible.

On définit également pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\eta_\varepsilon(A) := \{z \in \mathbb{C} / \quad \exists E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \quad \|E\| < \varepsilon \text{ et } z \in \text{ sp}(A + E)\}.$$

On considère z dans $\sigma_\varepsilon(A)$ et on veut montrer que z est dans $\eta_\varepsilon(A)$.

1. Traiter le cas où $zI - A$ n'est pas inversible.

2. On traite maintenant le cas où $zI - A$ est inversible. Montrer qu'il existe x et y dans $\mathbb{C}^n \setminus 0$ tels que $\|y\|_2 > \varepsilon^{-1}\|x\|_2$, et $zy = Ay + x$.

3. En déduire que z est dans $\eta_\varepsilon(A)$. On pourra chercher une matrice E de la forme $\lambda x y^*$ avec λ un complexe approprié.

4. On définit maintenant pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$\mu_\varepsilon(A) := \{z \in \mathbb{C}/ \quad \exists v \in \mathbb{C}^n/ \quad \|(zI_n - A)v\|_2 < \varepsilon \text{ et } \|v\|_2 = 1\}$.

   On considère z dans $\eta_\varepsilon(A)$. Montrer que z est dans $\mu_\varepsilon(A)$.
5. On considère z dans $\mu_\varepsilon(A)$. Montrer que z est dans $\sigma_\varepsilon(A)$.

Correction

1. Supposons que z est dans $\sigma_\varepsilon(A)$. Si $zI - A$ n'est pas inversible, alors il suffit de prendre $E = 0$.
2. Supposons dorénavant que $zI - A$ est inversible. Il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus 0$ tel que
$$\frac{\|(zI - A)^{-1}x\|_2}{\|x\|_2} > \varepsilon^{-1}.$$
   Notons $y := (zI - A)^{-1}x$ de sorte que $zy = Ay + x$.
3. On pose $E = \frac{1}{\|y\|_2^2} xy^*$ de sorte que $Ey = \frac{1}{\|y\|_2^2} xy^*y = x$, et donc $zy = (A + E)y$, et que $\|E\| = \frac{\|x\|_2}{\|y\|_2} < \varepsilon$. Ainsi z est dans $\eta_\varepsilon(A)$.
4. Supposons que z est dans $\eta_\varepsilon(A)$. Alors il existe $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\|E\| < \varepsilon$ et $z \in \operatorname{sp}(A + E)$. Il existe donc $y \in \mathbb{C}^n \setminus 0$ tel que $zy = (A + E)y$. Il suffit de poser $v := \frac{1}{\|y\|_2} y$ pour avoir $\|(zI_n - A)v\|_2 < \varepsilon$ et $\|v\|_2 = 1$. Ainsi z est dans $\mu_\varepsilon(A)$.
5. Enfin, supposons que z est dans $\mu_\varepsilon(A)$. Par définition il existe $v \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|(zI_n - A)v\|_2 < \varepsilon$ et $\|v\|_2 = 1$. Posons $y := (zI_n - A)v$. Soit $zI - A$ n'est pas inversible, et alors z est dans le spectre de A et donc bien dans $\sigma_\varepsilon(A)$, soit $zI - A$ est inversible. Alors on pose $v := (zI - A)^{-1}y$. Comme $\|(zI_n - A)v\|_2 < \varepsilon$ et $\|v\|_2 = 1$, il vient $\|y\|_2 < \varepsilon\|(zI - A)^{-1}y\|_2$, ce qui implique $\|(zI - A)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}$. Ainsi z est dans $\sigma_\varepsilon(A)$.