TRAVAUX DIRIGÉS de MATHÉMATIQUES

2017 / 2018

Semestre 3

Chapitre 1 : Généralités

<u>Exercice 1</u> (Fonction à paramètre et domaine de définition). Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x-m}}$.

1. Donner le domaine de définition de f_m en fonction de m.

2. Sur un graphique comportant x sur l'axe des abscisses et m sur l'axe des ordonnées, représenter le domaine de définition de f_m.

3. En déduire le domaine de définition de la fonction de 2 variables g définie par $g(x,y) = = \frac{1+x}{\sqrt{x-y}}$.

<u>Exercice 2</u> (Equation à paramètre) Soit $m \in [0; +\infty[$ fixé.

1. Ecrire l'équation $\frac{x}{x^2-1} = m$ sous la forme d'une équation polynomiale du second degré en x dont les coefficients dépendent de m.

2. Résoudre l'équation du second degré en x en fonction de m. Pour cela, on exprimera le discriminant en fonction de m.

3. On suppose à présent que $x \in [1\,; +\infty[$ et on note $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$. Que représente pour f l'expression de x en fonction de m obtenue dans la question précédente ?

<u>Exercice 3</u> (Calcul de limites). Etudier les limites de fonctions suivantes :

1) $f_1(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ en $(0,0)$ 2) $f_2(x,y) = 4x + xy + 2y^2$ en $(0,1)$

3) $f_3(x,y) = x\sin(xy)$ en $(0,0)$ 4) $f_4(x,y) = \frac{\ln(1+x)}{xy}$ en $(0,1)$

5) $f_5(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ en $(0,0)$ 6) $f_6(x,y) = \frac{xy}{x-y}$ en $(0,0)$

7) $f_7(x,y) = \frac{2x^2+3xy+y^2}{x^2+5y^2}$ en $(0,0)$ 8) $f_8(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ en $(0,0)$

<u>Exercice 4</u> (Calcul de limites)

1) Démontrer que limite $\frac{1-\cos(X)}{X^2} = \frac{1}{2}$ en 0.

2) En déduire la limite de $f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$ en $(0,0)$

Exercice 5 **(Calcul de limites).**

1. En passant en coordonnées polaires, calculer : $A = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

2. A l'aide d'un développement limité, calculer $B = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(x^2+xy+y^2)\ln(y)}{1-y}$

3. Montrer que $f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{\sqrt{1-\cos(x+y)}}$ n'a pas de limite quand (x,y) tend vers (0,0). On posera $u = x+y$ et on utilisera les développements limités en $u = 0$.

4. Montrer que $f(x,y) = \frac{\ln(1+x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ n'a pas de limite quand (x,y) tend vers (0,0). On effectuera un passage en coordonnées polaires puis on utilisera le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\ln(1+X)$.

5. Démontrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Exercice 6 **(Limite et continuité).** Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{\sqrt{xy}}{x^2-y^2}$.

1. Déterminer son domaine de définition.

2. Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

3. Est-ce que f est continue en $(0,1)$?

Exercice 7 **(Continuité).**

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2+y^2>1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que f est continue.

Exercice 8 **(Continuité).**

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 4$.

1) f est-elle continue en (0,0) ? Justifier.

2) Si non, est-elle prolongeable par continuité ? A l'aide de quelle valeur en (0,0) ?

Annale. Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{x^2-y^2}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.

2. Etudier $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. On utilisera le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\ln(1-X)$.

Chapitre 2 : Dérivées partielles

<u>Exercice 1</u>. Calculer les dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y de :

1) $f(x,y) = x^3y^2 + 10y^3 + 3$ 2) $g(x,y) = \sqrt{2x+y^2}$
2) $h(x,y) = \ln(5y + 3x^2)$ 4) $j(x,y) = (x^2+y)^3$
3) $k(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$ 6) $l(x,y) = \arctan(x+y)$

<u>Exercice 2</u>.

Soit f la fonction de 2 variables définie par $f(x,y) = e^x \cos(x+2y)$.

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2. Vérifier que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

<u>Exercice 3</u>. Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sin x$

3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

4. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x^2$

5. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

<u>Exercice 4</u>. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sin(x+y) + \frac{1}{2}(e^{2x+y} + e^{-2x-y})$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

3. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Chapitre 3 : Différentielle

Exercice 1. Calculer la différentielle des fonctions suivantes :

1) $f_1(x,y) = x^3 + xy^2$

2) $f_2(x,y) = \ln(xy - 1)$

3) $f_3(x,y,z) = x^2 + 2xy + yz + z^2$

4) $f_4(x,y,z) = \frac{xy}{x^3+5xy+z}$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = e^x \sin(y)$.

1. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ directement sans utiliser les dérivées partielles. On utilisera les développements limités en 0 des fonctions exponentielle et sinus.

2. Calculer la différentielle de f en ce point.

Exercice 3. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 1 + xy + y^2$.

(a) Montrer que $f(x,y)$ est différentiable en $(1,1)$ directement sans utiliser les dérivées partielles. Ecrire sa différentielle en ce point.
(b) Vérifier ces résultats à l'aide des dérivées partielles.
(c) Obtenir une approximation de la marge d'erreur pour $f(1,1)$ si on a une marge d'erreur de un dixième pour x et y.

Exercice 4. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$.

1. Déterminer la différentielle de f en $(1,2)$.

2. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1{,}02^3 + 2{,}07^3}$.

Exercice 5. Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \ln(x+2z) + \sqrt{1+y^2}$. On note $\mathcal{S}_f$ la surface engendrée par f, c'est-à-dire

$$\mathcal{S}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad f(x,y,z) = 0\}.$$

Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}_f$ au point $(1,0,0)$.

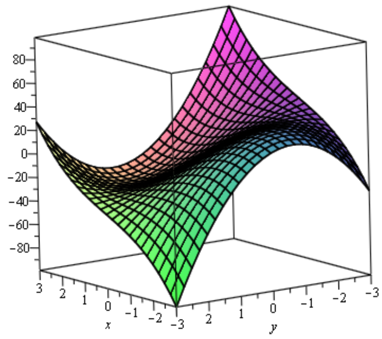
Chapitre 4 : Développements limités et extrema

<u>Exercice 1</u> (Développement limité et approximations).

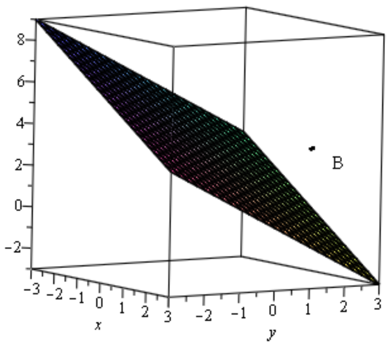
1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en (a, b) de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 1}\cos(y)$.

2. Donner une valeur approchée de $f(1.1, 0.02)$.

<u>Exercice 2</u> (Calcul d'extrema). Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Déterminer les extrema de f .



<u>Exercice 3</u> (Calcul de minimum). Dans un repère orthonormé direct, on considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x + y + z - 3 = 0$. On note B le point de coordonnées $(1, 2, 3)$. On cherche à calculer la distance de B au plan (P) notée $d(B, \mathcal{P})$: elle correspond à la plus petite distance du point B à un point M appartenant $(\mathcal{P})$.



1. Soit $M(x, y, z)$ un point appartenant à $(\mathcal{P})$. Exprimer la distance

$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2 + (z_M - z_B)^2}$$

de B à M en fonction uniquement de x et de y.

2. On note f la fonction définie par $f(x,y,z) = BM^2$. Déterminer le minimum de f. En déduire la distance $d(B,\mathcal{P})$.

3. Soit A le point correspondant au minimum de f. Vérifier que $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal au plan $(\mathcal{P})$.

<u>Exercice 4</u> (Calcul d'extremum avec contrainte).

On veut construire un bac rectangulaire (sans couvercle) d'une contenance de 10 litres en utilisant le moins de tôle possible. Quelles doivent être ses dimensions ?

<u>Exercice 5</u> (Droite de régression linéaire). On considère n points du plan $M_i(x_i, y_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$.

1. Montrer que f admet un minimum et déterminer la valeur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour laquelle il est atteint.

3. En déduire l'équation de la droite passant “au plus près” des n points $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$. Cette droite est appelée droite de régression linéaire.

Chapitre 5 : Fonctions composées - Changements de variables

<u>Exercice 1</u> (Changement de variable en coordonnées polaires). On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable.

1. Donner la fonction ϕ du changement de variables en coordonnées polaires en précisant l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée.

2. Déterminer la matrice jacobienne de ϕ.

3. Soit $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles de f.

4. Montrer que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

<u>Exercice 2</u> (Résolution d'équation aux dérivées partielles par changement de variables).

Soit f une fonction deux fois continûment différentiable. On pose le changement de variables $\begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{y^2}{x^3} \end{cases}$ pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. On note $F(u,v) = f(x,y)$.

(a) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$;

(b) Déterminer les fonctions f telles que $2x\dfrac{\partial f}{\partial x} + 3y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice 3</u> (Résolution d'équation aux dérivées partielles par changement de variables linéaire).

a) Déterminer toutes les fonctions $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$.

b) On considère le changement de variables $u = x - y$ et $v = 3x + y$. En posant $f(x,y) = F(u,v)$, calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$.

c) En déduire les fonctions f deux fois continûment différentiables vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

<u>Exercice 4</u> (Résolution d'équation aux dérivées partielles par changement de variables linéaire).

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable.

a) Déterminer toutes les fonctions $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiables telles que $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$.

b) On considère le changement de variables $u = x$ et $v = x - y$. Soit $F(u, v) = f(x, y)$. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en fonction de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$.

c) En déduire les fonctions f deux fois continûment différentiables vérifiant $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Chapitre 6 : Equations différentielles exactes et fonctions implicites

Exercice 1 (Intégration d'une forme exacte).

a) Montrer que la forme différentielle $\omega(x,y) = ydx + (x+1)dy$ est exacte.

b) Déterminer les primitives de ω, c'est-à-dire les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que $\omega = df$. Donner la primitive f de ω qui vérifie $f(1,1) = 2$.

Exercice 2 (Equation différentielle à variables séparables i. e. y' f(y)= g(x)).

Soit l'équation différentielle $(E_1) : y\,dx + (2x+1)\,dy = 0$.

a) Montrer que l'équation différentielle correspondante est à variables séparables.
b) La résoudre.

Exercice 3 (Application du théorème des fonctions implicites).

Soit ω la forme différentielle $\omega(x,y) = 2y(dy - dx) - 2xdy + dx$. On veut résoudre

$$(E_2) : \omega = 0$$

a) Montrer que cette équation n'est pas à variables séparables.
b) Montrer que $\omega(x,y)$ est exacte.
c) Réduire (E_2) à une équation fonctionnelle $f(x,y) = C$ où $C \in \mathbb{R}$.
d) Montrer que pour $C \neq 0$, il existe une solution $y = g(x)$, passant par $A(C,0)$.
e) Calculer explicitement cette solution.

Exercice 4 (Recherche d'un facteur intégrant pour une forme non exacte).

Soit la forme différentielle $\omega = \frac{x-y}{x}dx + dy$, définie pour $x \neq 0$.

a) Cette forme est-elle exacte ?
b) On pose $\omega_1 = f(x)\omega$. Montrer que ω_1 est exacte si f vérifie : $xf'(x) + f(x) = 0$.
c) Résoudre cette équation différentielle et chercher la solution $f(x)$ telle que $f(1) = 1$.
d) Déterminer une fonction $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $dF = \omega_1$.
e) En déduire les solutions de l'équation différentielle :

$$y' = \frac{y-x}{x}$$

Chapitre 7 : Intégrales doubles

<u>Exercice 1</u> (Calcul d'intégrales) Calculer les intégrales :

1) $I_1 = \iint_{\Delta} \frac{e^{-x}}{1+y^2} dxdy$ avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad 1 \leq x \leq 2, \ -1 \leq y \leq 1 \}$

2) $I_2 = \iint_{\Delta} (2x+3y) dxdy$ avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2 \}$

3) $I_3 = \iint_{\Delta} xydxdy$ avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad 1 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq x^2\}$

4) $I_4 = \iint_{\Delta} (xy+1) dxdy$ avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad -2 \leq x \leq 0, \ 0 \leq y, \ \ et\ x+y-1 \leq 0\}$

<u>Exercice 2</u> (Changement de variables)

1. Calculer I = $\iint_{\Delta} \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy$ où Δ est le quart de disque de rayon 2 centré à l'origine avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$ en passant en coordonnées polaires.

2. Calculer $J = \iint_{\Delta} xdxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x^2 + y^2 - x \leq 0 \}$.

<u>Exercice 4</u> (Calcul de volumes)

1. Calculer le volume du prisme droit de base [0 ;1]x[0 ;2] et de « couvercle » le plan
x + 2y – z = 0

2. On appelle onglet un cylindre coupé par un plan (oblique par rapport à son axe). On cherche le volume de l'onglet ayant pour base le demi disque (D_1) de centre O et de rayon 1 avec $y \geq 0$, et limité par le plan (P) d'équation $y + z - 1 = 0$.

a) Définir le demi-disque (D_1) en coordonnées polaires par des intervalles de variation pour r et θ.

b) Ecrire le volume de l'onglet sous forme d'une intégrale double, en coordonnées cartésiennes puis en coordonnées polaires.

c) Calculer ce volume.

<u>Exercice 5</u> (Calcul d'aire)

Calculer l'aire du domaine D = {(x,y) / -1≤y≤1 et y²≤x≤1 }

<u>Exercice 6</u> (Calcul de centre de gravité et de moment d'inertie)

1. Calculer l'aire du ½ disque de rayon R et de centre O tel que $y > 0$.

2. Déterminer son centre de gravité.

3. Calculer son moment quadratique par rapport à l'axe (Ox).

<u>Exercice 7</u> (Calcul d'intégrale simple).

Le but de cet exercice est de calculer I = $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (on ne se préoccupera pas des problèmes de convergence d'intégrale). Soit $J = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$ où D est le quart de plan où $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Soit D_R le quart de disque centré en O de rayon R avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$

a) Montrer que

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \left(\int_0^R e^{-t^2} dt\right)^2 \leq \iint_{D_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

b) Calculer $K_R = \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$ en passant en coordonnées polaires.

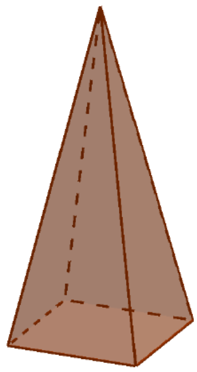
c) En remarquant que J = $\lim_{R \to +\infty}$ K_R, donner la valeur de J.

d) Montrer que J = I² et en déduire la valeur de I (on rappelle que la variable d'intégration est « muette »).

Chapitre 8 : Intégrales triples

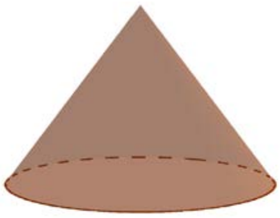
Exercice 1 :

Calculer $\iiint_S z dxdydz$ où S est la pyramide de base $\{-1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ z = 0\}$ et de sommet $A\ (0, 0, 5)$.



Exercice 2 :

Calculer, en passant en coordonnées cylindriques, $\iiint_S (x+y) dxdydz$ où S est le cône ayant pour base le disque, situé dans le plan $z = 0$, de centre O et de rayon 1, et pour sommet $A\ (0,0,1)$.



Exercice 3.

Soit $I = \iiint_D xyz dxdydz$, avec $D = \{(x, y, z) \in R^3; x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq z \leq 1; x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

(a) Montrer que les points M de D vérifient la condition $0 \leq r \leq z$, où r est la coordonnée cylindrique égale à ON avec N projection de M sur le plan xOy .

(b) Calculer I en utilisant les coordonnées cylindriques.

Exercice 4.

Calculer le volume, le centre de gravité et le moment d'inertie par rapport à l'axe des z d'un solide homogène S formant une demi-sphère supérieure de centre O et de rayon 1.

Exercice 5 :

On cherche la masse et le centre de gravité d'un solide homogène S constitué d'une demi sphère de rayon R munie d'un évidemment conique de rayon R/2 à la base et de hauteur R/2 .

(a) Trouver la masse de la demi sphère et la cote de son centre de gravité en utilisant les coordonnées sphériques.

(b) Trouver la masse du cône supposé plein et la cote de son centre de gravité en utilisant les coordonnées cylindriques.

(c) En déduire la masse et la cote du centre de gravité du solide S.

Exercice 6 :

Dans l'espace muni d'un repère $\left\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, soit le solide défini par $0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)$ avec $x^2+y^2 \leq 1$. Déterminer le volume est le centre de gravité de ce solide supposé homogène (on passera en coordonnées cylindriques).

Formulaire

Dérivées

Soient a et b éléments de R : $\boxed{(af + bg)' = af' + bg'}$

$\boxed{(uv)' = uv' + vu'}$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$

$\boxed{(f(u(x)))' = u'(x)\ f'(u(x))}$

f(x)	***f '(x)***	***f(x)***	***f '(x)***	***f(x)***	***f '(x)***
$x^a \quad a \in \mathbb{Q}$	$a\,x^{a-1}$	e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	ch x	sh x	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	sh x	ch x	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	argsh x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		argch x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
				arctan x	$\frac{1}{1+x^2}$

<u>Equation du plan tangent</u> à la surface $S_f : z = f(x, y)$ en A(x_0, y_0, z_0) avec $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

<u>Extrema</u> : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$; $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$

$rt - s^2 > 0 \Rightarrow$ extremum (maximum si $r < 0$, minimum si $r > 0$)

$rt - s^2 < 0 \Rightarrow$ pas d'extremum $\qquad$ $rt - s^2 = 0 \Rightarrow$ cas douteux

<u>Différentielle totale</u> de $f(x, y)$:

$$df_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

<u>Passage en coordonnées polaires</u> :

$$x = \rho\cos\theta \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta \qquad\qquad dxdy = \rho d\rho d\theta$$

<u>Passage en coordonnées cylindriques</u> :

$$x = \rho\cos\theta\,,\ \ y = \rho\sin\theta \ \text{ et } \ z = z \qquad\qquad dxdydz = \rho d\rho d\theta dz$$

<u>Passage en coordonnées sphériques</u> :

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,,\ \ y = r\sin\theta\cos\phi \ \text{ et } \ z = r\sin\phi \qquad\qquad dxdydz = r^2\cos\phi\, drd\theta d\phi$$

<u>Matrice jacobienne</u> de $\phi(x, y, z) = (u, v, w)$:

$$J_\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$