TD5 - sous-espaces caractéristiques et nilpotence

2016-2017

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose u n'admet que deux sous-espaces caractéristiques E_1 et E_2. Ainsi, on a $E = E_1 \oplus E_2$. On note π_1 et π_2 les projecteurs associés à cette somme directe, c'est-à-dire

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \qquad \pi_1(x_1 + x_2) = x_1 \qquad \pi_2(x_1 + x_2) = x_2.$$

1) En revenant à la définition des sous-espaces caractéristiques et en utilisant le théorème de Bezout, prouver qu'il existe un polynôme $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\pi_1 = P_1(u)$ et $\pi_2 = P_2(u)$.

2) Dans le cas où u est diagonalisable, retrouver le résultat précédent.

3) Expliciter P_1 et P_2 dans le cas où u est un projecteur.

Exercice 2

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$, en utilisant une réduction de A relative à ses sous-espaces caractéristiques, prouver que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

i) A est diagonalisable

ii) $A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{2} I_2$ est nilpotente.

Question bonus : est-ce que les deux cas peuvent se produire simultanément ?

Exercice 3

Soit A et B deux matrices non nulles dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{tr}(AB) = 0$. Soit f l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$f : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)B.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que f est nilpotent.

3) Que vaut le rang de f ?

Exercice 4

Nous avons montré dans une fiche de TD précédente que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est une matrice nilpotente alors $\det(I + A) = 1$.

1) Retrouver ce résultat avec une réduction de A.

2) Plus généralement, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme alors montrer que $\det(P(A)) = P(0)^n$.

3) De même qu'à la question précédente, que vaut $\mathrm{tr}(P(A))$?

Exercice 5

Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente et l'on note $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ son rang.

1) Expliquer pourquoi $A^3 = 0$ et en déduire que $r \neq 3$.

2) Que vaut A si $r = 0$?

3) Supposons $r = 1$. Justifier qu'il existe $X \in M_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX \neq 0$. En déduire à l'aide d'un changement de base que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Supposons que $r = 2$. Quitte à trigonaliser A, prouver que $A^2 \neq 0$. En choisissant $X \in M_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que $A^2X \neq 0$, prouver que X, AX, A^2X sont libres. En déduire à l'aide d'un changement de base que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Conclure que deux matrices nilpotentes sont semblables si et seulement si elles ont le même rang.

6) Trier les matrices suivantes par famille de matrices semblables :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 \\ 17 & 18 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Trouver deux exemples de matrices 3×3 de même rang mais qui ne sont pas semblables.

Exercice 6

Soient u et w deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-ev E de dimension finie ≥ 2. On suppose que $u \circ w = w \circ u$.

1) Montrer que u laisse stable les sous-espaces caractéristiques de w.

2) En déduire pourquoi il existe une base de E qui trigonalise simultanément u et w.

3) Réciproquement si u et w sont simultanément trigonalisés dans une même base, est-ce que u et w commutent ? Indication : on pourra tester des matrices de taille 2×2.

Exercice 7

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-ev E de dimension finie.

1) Expliquer pourquoi la notation $Id + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$ définit bien un endomorphisme de E. On notera désormais $\exp(u) = Id + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$.

2) Calculer $\det(\exp(u))$ et $\operatorname{tr}(\exp(u))$ à l'aide d'une réduction adéquate de u.

3) Soit w un endomorphisme nilpotent de E qui commute avec u. On sait que $u + w$ est nilpotent (voir TD précédent ou exercice précédent). Prouver que $\exp(u + w) = \exp(u) \exp(w)$.

4) En déduire la matrice inverse de $\exp(u)$.

Exercice 8

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente telle que $A^{n-1} \neq 0$. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur colonne tel que $A^{n-1}X \neq 0$.

1) Prouver que $(A^{n-1}X, A^{n-2}X, \ldots, AX, X)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{C})$.

2) Représenter la matrice obtenue après changement de base.

3) En déduire que si A et B sont deux matrices nilpotentes vérifiant $A^{n-1} \neq 0$ et $B^{n-1} \neq 0$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $PAP^{-1} = B$.

Exercice 9

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

1) Montrer que l'opérateur de dérivation $D : P \mapsto P'$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) On note $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Représenter A.

3) Montrer que l'opérateur $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) On note $B \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Représenter B.

5) Est-ce que les matrices A et B sont semblables ?

6) Prouver que $\exp(D) = Id + \Delta$ (indication : on pourra comparer $\exp(D)P$ et $(Id + \Delta)P$ en reconnaissant une formule de Taylor).

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

1) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{Q}_{n-1}[X]$ vérifiant au voisinage de $x = 0$:

$$\sqrt[3]{1+x} = P_n(x) + O(x^n).$$

2) Montrer que $P_n^3 - 1 - X$ est divisible par X^n.

3) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, on rappelle que l'on a $A^n = 0$. Prouver qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $B^3 = I + A$.

4) Est-ce que B est inversible ? Y a-t-il unicité de la matrice B ?

Exercice 11

Soit n un entier ≥ 2. Nous dirons qu'une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $M_n(\mathbb{C})$ est bornée si pour chaque $(i,j) \in \{1, ...n\}^2$, la suite de nombres complexes $(A_{k,i,j})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. Autrement dit, les n^2 suites des coefficients sont bornées. Par exemple :

Si $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & k^2 \end{pmatrix}$, alors (A_k) n'est pas bornée. Si $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ e^{-k} & \cos(k) \end{pmatrix}$ alors A_k est bornée.

1) On note $E_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les éléments valent 0 sauf l'élément (i,j) qui vaut 1. On considère de plus un endomorphisme $\Psi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$. A l'aide de la formule $A_k = \sum_{i,j} A_{k,i,j} E_{i,j}$, prouver que si la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée alors il en est de même de la suite de matrices $(\Psi(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$.

2) Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente non nulle, montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}^{\star}$ tel que $I, N, N^2, \ldots, N^{\ell}$ sont libres dans $M_n(\mathbb{C})$. Expliquer pourquoi $\ell \leq n-1$.

3) Justifier qu'il existe un endomorphisme $\Psi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ tel que $\Psi(I_n) = E_{1,1}, \Psi(N) = E_{1,2}, \ldots, \Psi(N^{\ell}) = E_{1,\ell}$.

4) En déduire que si $A_k = (I+N)^k$ alors (A_k) n'est pas bornée.

5) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice qui n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ et posons $A_k = A^k$. En utilisant la décomposition en sous-espaces caractéristiques, étudier dans quel cas (A_k) est bornée.

6) Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que la suite $(B^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. Prouver que chaque valeur propre de B est un nombre complexe de module ≤ 1.