Courbes planes

IUT de Bordeaux

2015-2016

Génie Mécanique et Productique

Introduction aux courbes paramétrées

Définition

Soient $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $\gamma : I \longmapsto \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)),\ \ t \in I.$$

Le couple (I, γ) est une **courbe paramétrée** du plan. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \gamma(I) = \{M(t) = (x, y)/(x, y) = (f(t), g(t)), t \in I\}$$

est le **support de la courbe paramétrée**. Le système d'équations

$$\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{cases},\quad t \in I$$

est appelé **représentation paramétrique (ou paramétrage)** de $\mathcal{C}$.

Exercice 1. *Représentation paramétrique.*

1. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(0, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 2)$. En déduire une représentation paramétrique d'une droite passant par $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels non nuls. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
3. Donner une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$.
4. A l'aide du changement de paramètre $u = \tan(\frac{t}{2})$, donner une autre représentation paramétrique du cercle de centre O et de rayon 1.
5. Donner une représentation paramétrique du premier quart de cercle de centre $A(4, -3)$ passant par l'origine du repère.
6. Donner une représentation paramétrique du graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}$.
7. Donner une représentation paramétrique du graphe d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 2. *Transformations géométriques et représentation paramétrique*

Soit $\mathcal{C} : t \in I \longmapsto M(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée.

1. On suppose que pour tout $t \in I$, $(x(-t), y(-t)) = (y(t), x(t))$. Donner la transformation géométrique permettant d'obtenir le point $M(-t)$ de la courbe à partir du point $M(t)$.

2. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t^4+t^2 \\ y & = & t^6 \end{array}\right. , \; t \in \mathbb{R}$$
Déduire à partir de la question précédente pour quelles valeurs de t il suffit de construire la courbe paramétrée.

3. On suppose que pour tout $t \in I$, $(x(-t), y(-t)) = (-y(t), -x(t))$. Donner la transformation géométrique permettant d'obtenir le point $M(-t)$ de la courbe à partir du point $M(t)$.

4. Soit
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t^3 \\ y & = & t \end{array}\right. , \; t \in \mathbb{R}$$
Déduire à partir de la question précédente pour quelles valeurs de t il suffit de construire la courbe paramétrée.

5. On suppose que $I = [0, a]$ avec a un réel strictement positif. Soit $\phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto a - t$. On suppose que pour $t \in I$, on a $(x(\phi(t)), y(\phi(t))) = (-y(t), -x(t))$. Donner la transformation géométrique permettant d'obtenir le point $M(\phi(t))$ de la courbe à partir du point $M(t)$.

I- Courbes paramétrées

1. Réduction de domaines

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{t}{t^2-4} \\ y & = & \sqrt{t^2-1}. \end{array}\right.$$

1. Donner le domaine de définition de la courbe $\mathcal{C}$.
2. Etudier la parité des fonctions x et y.
3. En déduire le domaine d'étude réduit et donner les transformations géométriques liées à la réduction du domaine.

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos(3t+\pi/4) \\ y & = & \tan(2t). \end{array}\right.$$

1. Donner le domaine de définition de la courbe $\mathcal{C}$.
2. Etudier la périodicité des fonctions x et y.
3. En déduire le domaine d'étude réduit et donner les transformations géométriques liées à la réduction du domaine.

2. Etude des variations et branches infinies

Exercice 3. L'étude d'une courbe paramétrée $(x = f(t), y = g(t))$ a donné les tableaux de variations suivants.

t	$-\infty$		t_1	t_2	t_3		t_4		t_5		$+\infty$
x'		$+$	0		$-$		0			$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	0	-1	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

t	$-\infty$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		0	$-$
y	3	2	1	3	4	5	$-\infty$

Représenter cette courbe en précisant les vecteurs tangents connus.

Exercice 4. On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t^2 \\ y & = & 2t^3. \end{array}\right.$$

1. Réduire le domaine d'étude de la courbe.
2. Etudier les variations de la courbe.
3. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.

Exercice 5. On considère la courbe

$$\mathcal{C}\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{t-1} \\ y & = & \frac{1}{t^2-1}. \end{array}\right.$$

Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.

3. **Etude locale**

Exercice 6. On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t^2 \\ y & = & 2t^3 \end{array}\right.$$

1. Déterminer les points singuliers de la courbe.
2. Donner la nature du point de la courbe de paramètre $t = 0$.
3. Donner l'équation de la tangente au point $M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{C}$ la courbe

$$\mathcal{C}\left\{\begin{array}{lcl} x & = & (t-1)^3 + 2 \\ y & = & 2(t-1)^4. \end{array}\right.$$

Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point singulier et donner la nature de ce point singulier.

Exercice 8. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie par

$$\mathcal{C}\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{t^2-4} \\ y & = & \frac{t^2}{t-2}. \end{array}\right.$$

1. Dresser le tableau de variations de la courbe.
2. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.
3. Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de x et de y.
4. En déduire la nature du point M_0 de la courbe de paramètre $t = 0$.

4. **Etude complète et tracé de courbes**

Exercice 9. Courbe de Lissajous
Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sin(2t) \\ y & = & \sin(3t). \end{array}\right.$$

Etudier et construire la courbe $\mathcal{C}$. Pour cela, on commencera par

1. réduire le domaine d'étude,
2. étudier les variations de $\mathcal{C}$,
3. étudier les points singuliers de $\mathcal{C}$.
4. S'il existe au moins deux paramètres t et t', $t \neq t'$ tels que $M(t) = M(t')$, on dit que $M(t)$ est un point multiple. Trouver les points multiples de $\mathcal{C}$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \cos(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2(t) \\ y & = & \sin(t)\cos(t). \end{array}\right.$$

1. Montrer qu'il suffit d'étudier la courbe sur $[0, \pi]$.
2. Calculer x' et y'. Montrer que x' s'annule et change de signe en $t = \frac{\pi}{4}$ et que y' s'annule en $t = \frac{\pi}{4}$ et en $t = \frac{3\pi}{4}$. En déduire les variations de x et y. *On utilisera l'égalité* $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.
3. Faire l'étude locale de la courbe en $t = \frac{\pi}{4}$.
4. Donner la tangente au point $M(0)$.
5. Tracer la courbe.

Exercice 11. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3\cos(t) + 2\cos(3t) \\ y & = & 3\sin(t) - 2\sin(3t) \end{array}\right.$$

1. Réduire le domaine d'étude de $\mathcal{C}$.
2. Etudier les variations de $\mathcal{C}$.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 12. On considère la courbe paramétrée $t \longmapsto (x, y)$.

1. Faire l'étude locale (calcul du vecteur tangent et position par rapport à la tangente) de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point M_0 de paramètre $t = 0$ sachant que le $DL_5(0)$ de x est $1 + t^2 - t^3 + t^5$ et le $DL_5(0)$ de y est $2 - t^2 + t^3 + 2t^5$.
2. Représenter graphiquement la courbe au voisinage du point A.

Exercice 13. Etudier et représenter la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x &= \operatorname{ch}(t) \\ y &= \operatorname{sh}(t). \end{cases}$$

II- Courbes en coordonnées polaires

1. **Réduction de domaines**

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $\theta \longmapsto \sin(3\theta)$.

1. Donner le domaine de définition de $\mathcal{C}$.
2. Etudier la parité et la périodicité de ρ. En déduire le domaine d'étude réduit et en déduire les transformations permettant d'obtenir la courbe en entier.

Exercice 2. Soit $\theta \longmapsto \sqrt{\cos(2\theta)}$ une courbe en coordonnées polaires.

1. Donner le domaine de définition de ρ.
2. Etudier la parité et la périodicité de ρ. En déduire le domaine d'étude réduit et les transformations permettant d'obtenir la courbe en entier.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C} : \theta \in I \longmapsto \rho(\theta)$ une courbe en coordonnées polaires.

1. On suppose que $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$ pour $\theta \in I$. Donner la transformation géométrique permettant d'obtenir le point $M(\pi - \theta)$ de la courbe à partir du point $M(\theta)$. Donner le domaine d'étude réduit lié à cette transformation.
2. Mêmes questions si on suppose que $\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$ pour $\theta \in I$.
3. On suppose que $\rho(\pi + \theta) = \rho(\theta)$ pour $\theta \in I$. Donner la transformation géométrique permettant d'obtenir le point $M(\pi + \theta)$ de la courbe à partir du point $M(\theta)$. Donner le domaine d'étude réduit lié à cette transformation.
4. Mêmes questions si on suppose que $\rho(\pi + \theta) = -\rho(\theta)$ pour $\theta \in I$.

2. **Etude des branches infinies**

Exercice 4.

1. Etudier la branche infinie de la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \theta - \frac{1}{1-\theta}$ en $\theta = 1$.
2. Que peut-on dire du point d'angle polaire $\theta = 0$?

Exercice 5. Etudier la branche infinie de la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \frac{\theta}{\cos(\theta)}$ en $\theta = \frac{\pi}{2}^+$.

Exercice 6. Etudier la branche infinie de la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \frac{2\cos(\theta)+1}{2\sin(\theta)-1}$ en $\theta = \frac{\pi}{6}$.

3. **Etude complète et tracés de courbes**

Exercice 7. Soit $\theta \longmapsto \rho(\theta)$ une courbe en coordonnées polaires. On suppose que ρ est paire et 2π périodique. A partir du tableau de valeurs ci-dessous, tracer la courbe.

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$\rho(\theta)$	2	1.7	1	0.3	0
$\rho'(\theta)$	0	-0.7	-1	-0.7	-0.2

Exercice 8. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$.

1. Réduire le domaine d'étude.
2. Dresser le tableau de variations de ρ.
3. Déterminer les tangentes en $\theta = 0$ et en $\theta = \pi$.

Exercice 9. Soit la courbe $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \cos(2\theta)$.

1. En étudiant la parité et la périodicité de ρ, montrer qu'il suffit d'étudier $\mathcal{C}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Préciser les symétries permettant d'obtenir entièrement la courbe.
2. Dresser le tableau de variations de ρ.
3. Calculer $\rho(\theta)$ et $\rho'(\theta)$ pour $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 - \cos(\theta)$.

1. Après avoir étudié la parité et la périodicité de ρ, réduire le domaine d'étude de la courbe. Quelles sont les symétries qui permettent d'obtenir la courbe en entier.
2. Dresser le tableau de variations de ρ.
3. Calculer $\rho(\theta)$ et $\rho'(\theta)$ pour $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$. Que peut-on dire du point $\theta = 0$?
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

III- Etude métrique des courbes

Exercice 1 (Courbe paramétrée)**.** Soit $\mathcal{C} : t \in [0, 2\pi] \longmapsto (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$.

1. Calculer l'abscisse curviligne s de $\mathcal{C}$.
2. Calculer la longueur de la courbe.
3. Calculer le rayon de courbure de $\mathcal{C}$ pour $t \in \left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 2 (Courbe en coordonnées polaires)**.** Soit $\mathcal{C} : \theta \in [-\pi, \pi] \longmapsto 1 + 2\cos(\theta)$.

1. Déterminer le rayon et le centre de courbure en tout point $M(\theta)$.
2. Tracer le cercle osculateur pour les angles polaires $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Exercice 3 (Courbe représentative d'une fonction)**.** Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \longmapsto \ln(\cos(x))$.

1. Calculer la longueur de la courbe.
2. Déterminer le centre et le rayon de courbure en $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 4. Soient $M(s)$ et $M(s_0)$ deux points d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne. On note $X(s)$ et $Y(s)$ respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point $M(s)$ dans le repère de Frénet $(M(s_0), \overrightarrow{T}(s_0), \overrightarrow{N}(s_0))$.

1. Exprimer le développement limité à l'ordre 2 quand s tend vers s_0 de $\overrightarrow{OM}(s)$.
2. En déduire la valeur de

$$\lim_{s \to s_0} \frac{X(s)^2}{2Y(s)}.$$

Exercice 5 (Détermination angulaire et rayon de courbure)**.** Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^2$. On se place dans le plan muni du repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note s l'abscisse curviligne et $\overrightarrow{T}$ le vecteur tangent unitaire. On admet qu'il existe $\alpha : s(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{T} = \cos(\alpha)\overrightarrow{i} + \sin(\alpha)\overrightarrow{j}.$$

1. Donner l'expression du paramétrage normal de γ.
2. Donner l'expression du vecteur normal unitaire en fonction de α.

3. A quel angle correspond α ? En déduire une expression de $\tan(\alpha)$ en fonction des dérivées des fonctions coordonnées x et y de γ.
4. En dérivant l'expression de $\tan(\alpha)$ obtenue précédemment, exprimer $\dfrac{d\,\alpha}{dt}$ en fonction de x', y', x'' et y''.
5. Retrouver l'expression du rayon de courbure pour une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes birégulière (on commencera par exprimer le rayon de courbure en fonction de $\dfrac{d\,\alpha}{d\,s}$).