TEST N^o 3
Durée : 1 heure

Exercice 1 *Équations différentielles*

1. ■ COURS – On considère une équation différentielle (E) du type $y' = ay + b$ avec $a, b : I \to \mathbf{R}$ des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Rappeler ce qu'est l'équation homogène (E_0) associée à (E), donner l'ensemble des solutions de (E_0) sans justification, puis l'ensemble des solutions de (E) en fonction d'une solution particulière de (E) notée y_p.

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = ty(t).$$

♣ CORRECTION – L'équation différentielle est déjà homogène, car du type $y' = a(t)y + b(t)$ avec b la fonction nulle. Il suffit donc d'appliquer le résultat sur le cas homogène et il fournit toutes les solutions ! Pas besoin de faire une méthode de variation de la constante donc. On obtient que l'ensemble solution est l'ensemble des fonctions du type $y(t) = C \exp\left(t^2/2\right)$ avec C constante réelle.

3. Résoudre l'équation différentielle suivante avec problème de Cauchy :

$$y'(t) = \sin(t)\cos(t).y(t), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

♣ INDICATION – On pourra calculer la dérivée de la fonction $t \longmapsto \sin^2(t)$ avant de commencer.

♣ CORRECTION – On applique la formule de dérivation d'une fonction composée. Elle fournit :

$$(\sin^2(t))' = 2\sin t \cos t.$$

Alors, l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions du type

$$y(t) = C\exp\left(\int \sin t \cos t\right) = C\exp\left(\frac{\sin^2 t}{2}\right),$$

où C est une constante réelle. Comme avant, aucune méthode de variation de la constante n'est nécessaire ! l'équation différentielle est déjà homogène. Á noter que si vous faites la méthode de variation de la constante correctement, sans second membre la solution particulière fournit correspond à "$C'(t) = 0$". On retombe alors sur l'ensemble précédent.

Exercice 2 *Fonctions de plusieurs variables*

1. ■ COURS – Redonner la méthode de recherche d'extrema pour des fonctions de deux variables dérivables deux fois. On définira notamment la notion de point critique, et précisez sous quelle(s) condition(s) un point critique est un extrema.

2. Étudier les extrema de la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1.$$

♣ CORRECTION – Ici, on trouve les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 0 + y + 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 + 2y + x + 0.$$

En résolvant le système linéaire $2x + y = 0$ et $2y + x = 0$, on trouve $(0, 0)$ comme seul point critique. Attention aux nombreuses erreurs de calculs que j'ai pu voir ! Les dérivées secondes sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = 2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1.$$

Elles ne dépendent pas des coordonnées du point critique. Et on trouve qu'il s'agit d'un minimum en $(0, 0)$.

Exercice 3 *Intégrale Multiple*

Calculer :

$$\int\int_{[0,\pi/2]\times[-1,1]} (y^2 \cos x - x^2 y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

♣ CORRECTION – Cf. feuille de révisions.